# NUOVA
# ARITMETICA TEORETICO-PRATICA

DEL

CANONICO ANTONIO VITALE

AD USO

DEL VENERABILE SEMINARIO DI ANGLONA E TURSI

NAPOLI
Stabilimento Tipografico di Giuseppe Cataneo
1856

A S. E. R.ma

# D. GENNARO MARIA ACCIARDI

MAESTRO IN SACRA TEOLOGIA, ASSISTENTE AL TRONO PONTIFICIO, ABATE DI S. NILO IN ROCCANOVA, BARONE E DOMINO UTILE DEL FEUDO DI ANGLONA

E

VESCOVO DI ANGLONA E TURSI EC.

---

*Eccellenza*

L' onorevole, quanto geloso ministero, a cui l'E. S. Rev.ma si degnò destinarmi, di leggere nel suo Venerabile Seminario di Anglona e Tursi la Filosofia e Matematica, mi ha tenuto per più anni nel voto di dare alla luce un Corso Elementare di Sintetiche Matesi, in cui, sceverato quanto d'imbarazzevole e minuto l'animo degli apprendenti fastidiosamente ed infecondamente tratten-

ga, si avessero in lucido ed ordinato prospetto quelle interessevoli teorie, che più i secreti revelino della misteriosa natura, e più ad ammirare ed adorare ci menino i profondi giudizii di quel Creatore supremo, che pari al potere spiegò la sua Sapienza infinita nell'architettar l'universo. L'idea di far cosa grata a'discenti, loro economizzando tempo, loro da vero a vero, da vaghezza a vaghezza, quotidianamente menando; e 'l pari pensiero di prender parte comechè menima nella luminosa scena, che Ella all'immegliamento di sua diletta Diocesi da un ben felice settennio si lodevolmente dischiuse, mi dà fermezza

ed ardire di attuare le fondamenta della ideata im-
presa col pubblicare un Corso di *Aritmetica Teo-
retico-Pratica*, che di sodi intellettuali poteri gl' in-
gegni giovanili rafforzi ed alla sfera de' raziocinii
gradatamente li elevi.

All' E. S. Rev.$^{ma}$, che di svariate lucide co-
gnizioni è avventurosamente fornita, e che all' e-
steso e profondo sapere la viva e lodevole premura
congiunge di promuovere, per tutti i modi e tutti
i gradi, nella studiosa adolescenza il sapere, un tal
lavoro umil che fosse divotamente consacro. Voglia
il suo bell' animo, tra tanti obbjetti di pietà di

costume di pubblica spirituale utilità, non aver discari que' fiori di cui le più severe fronti si adornano, e che nel pacifico recinto di quelle mura si educano, fra le quali Ella stessa benignamente, nel tempestar di mia vita, a segno non equivoco di protezione e di amore, mi trasse.

Napoli 27 Gennajo 1856

*Obbedientissimo ed ossequiosissimo servo*
CANONICO ANTONIO VITALE

# PREFAZIONE

La diffusione degl'innumerevoli trattati elementari di Matematica messi a luce in ogni età da chiarissimi uomini, che di pubblica lode nelle astratte e severe scienze furono condegnamente rimeritati, farà di primo incontro stimare oziosa e soverchia la nostra novella ARITMETICA TEORETICÓ-PRATICA, di cui alla gioventù studiosa, in un secolo di progressi e migliorazioni positive, facciamo indirizzo anche noi.

Non di pertanto, se alcuno a considerazione sommetta il disegno che nella sposizione di tali conosciute materie unicamente ci proponemmo di mira, avaro non sarà di accordarci luogo tra il novero di coloro che, vogliosi di diffondere il vero, industriosi e sagaci si fanno di presentarlo a quelle più semplici e naturali fogge atteggiato, a quella più tollerabile e soave luce dischiuso, che più attemperato agli umani intelletti riesca.

Noi intendiamo invitare all'apprendimento delle numeriche dottrine que'giovanetti primi, che non usi a sostenere un sublime teorico ragionamento abbisognano essere grado per grado manodotti al concepimento delle verità più levate, che il nobile e lo specioso statuiscono della *scienza del calcolo*. Credemmo perciò recare non lieve vantaggio agli stessi in preparando le loro menti con considerazioni minori e quasichè d'intuizion primitiva; rafforzandole, in progredire, di al-

tre analoghe ma più profonde riflessioni, che all'ascensione della giovanile intelligenza potentemente influissero; ed intrattenendole soventi volte, a motivo di renderle più pratiche ed innamorate delle scientifiche sorgenti, in quelle verità che più feraci di preziose conseguenze, sia negli attuali sia ne' laterali e più assorgenti matematici trattati, antivedemmo.

Guadagneremo quindi, a nostro credere, di molto, se i giovanetti vedessimo giorno per giorno al comprendimento de'*veri* felicemente sospingersi; e si accorgessero lieti di quanto lor faccia pro l'educarsi nella scuola dell'intelligenza e nelle vie forbirsi de' ragionamenti severi.

Che però ci stringemmo rigorosamente al dovere di spogliare le locuzioni, per quanto più possibil venisse, di quelle forme supremamente astratte e generali, che importano soverchio stento alle menti: dividere in considerazioni minori i concepimenti più astrusi: adoperarci per tutto acciò con luce, a mo di dire, meridiana l'intelletto giustifichi raziocinando i precetti, ed i precetti non altri, che gl'indicati e voluti da' ragionamenti, si fossero. Così niuna pur menoma dimostrazione omettendo; niun elemento che a maggior chiarezza menasse intralasciando; gli oscuri ovvero i sublimi luoghi di altri precedenti espositori distenebrando: ad altri la gloria sarà dovuta di aver in alto e dignitoso seggio locate le Matematiche discipline; a noi la soddisfazione più piacerà di aver agevolato le vie agli apprendenti, onde più alacremente e speditamente più, con brevità di tempo ed indignazione niuna, le raggiungessero.

# TITOLO I.

## PRELIMINARI ALLA SCIENZA DEL CALCOLO.



### § 1.

*Idea dell' Unità.*

Giovanetti, volgete per poco l' occhio su gli oggetti che vi circondano, oggetti che fanno parte di questo ammirabile teatro della natura. Quanti dipinti augelli non si affrettano verso quella torre elevata! quanti fiori non ornano quell' aprica campagna! quante elci od annosi roveri in quella selva! quanti sassi lungo la riviera di quel precipitoso torrente o arene attorno al lido del mare o lucide stelle nella vistosa cupola del cielo! La vostra mente è sopraffatta dal numero incredibile de' tanti svariati oggetti, che alla vostra percezione presentansi: se per poco la vastità ponesi dessa a considerarne, resterà tutta assorta in questa moltiplice ed incalcolabile moltitudine. Essa potrà dir solo « Possente Iddio, quanti esseri! » Ma se vogliate voi farvi più presso alle cose, ed in voi si desti lodevol desiderio di conoscer più chiaramente e più distintamente ciascun oggetto, voi richiamerete il pensiero dalla idea di un tanto numero; separerete dalla sua classe l' oggetto, che vi avrete prefisso a considerare; vi restringerete a contemplare unicamente questo, come solo, segregato, indipendente da ogni altro. Il vostro pensiero non sarà occupato dagli oggetti simili; un solo bensì si verserà dinanti al vostro spirito. Quest'oggetto separato dalla sua classe voi lo direte *Uno.*

E generalizzando tale idea, voi direte « *Unità è tutto ciò che viene considerato come solo, distinto, e indipendente da ogni altro.*

L' unità presuppone adunque

1. Numero di oggetti simili.
2. Segregazione di un solo dalla indicata moltitudine de' simili.

## § 2.

### *Divisione dell' Unità.*

Ciascun essere, che a noi dimostrasi esteso, come dall'esperienza ci è noto, è composto di parti, e lo è divisibile in parti. Quel sasso, che voi considerate come uno in natura, è divisibile in tanti sassolini, e ciascun sassolino in più minute arene: il ruscello è divisibile in più gocce, il legno in più schegge, e la matura spiga del campo in altre minutissime parti. Da ciò conchiuderete, che l'essere da voi considerato *Uno* in natura è composto di parti, ed è divisibile e suddivisibile in parti. Ma una tale divisione dovrà alla fine avere un termine: si giungerà a particelle sì piccole, che non ammetteranno ulteriore divisione. Esse sono in gran numero, e si concepiscono uguali in grandezza, in figura, ed in valore. Siam dunque nel medesimo caso dell'antecedente discorso: voi potrete considerare ciascuna di queste parti, come sola, segregata, indipendente da ogni altra; voi chiamerete questa anche *Unità*. Evvi però differenza tra l'unità del primo genere, e quella del secondo. La prima è un complesso, una riunione, un aggregato di tante unità, come si è detto; la seconda è indivisibile, indecomponibile e primigenia. La prima ci viene dall'esperienza, dal fatto, da' sensi; la seconda si concepisce solo coll'immaginazione e con lo spirito. La prima non è vera unità, ma bensì complesso di unità: è lo spirito, che la considera tale, ma tale non è in se stessa, in origine, in atto: la seconda è veramente indecomponibile, veramente indivisibile, veramente una.

Noi daremo diversi nomi all'unità, che abbiamo diversamente considerata.

L'unità, che è decomponibile in altre, la diremo *Unità ideale* o *apparente*, perchè nell'idea nostra soltanto può considerarsi tale, ma tale non è però nella sostanza e nel fatto.

La indecomponibile, la indivisibile, la veramente una, la diremo *Unità reale.*

L'unità si divide dunque

1. In Unità Apparente.
2. In Unità Reale.

### *Avvertimento.*

È da osservarsi, che l'unità *ideale* o *apparente* è capace

nel nostro spirito di accrescimento o di diminuzione, ben potendo la nostra mente concepire l'immagine di una torre più grande ovver più piccola, le acque di un fiume o minor letto covrire o più esteso. Per tal rispetto i Matematici definiscono la grandezza « *ciò, ch'è capace di accrescimento e diminuzione, ciò ch'è divisibile in parti*, ec. ec. ec. Essi dunque accordano al vocabolo *grandezza* quel significato, che noi concedemmo all'*unità ideale o apparente*. Noi, ad oggetto di non alterare il comune linguaggio, chiamiamo l'unità ideale o apparente parimenti *grandezza*, e di tal dizione useremo pure nelle riflessioni, che seguiranno.

## § 3.

### *Suddivisione dell' unità ideale o grandezza.*

Dividete, o Giovanetti, un ducato in carlini dieci. Desso non avrà perduto alcun valore: tutto il ducato diverrà cento grana, e voi siete persuasi, che l'istesso calcolo può istituirsi sopra cento grana, che sopra un ducato: desso ducato ha mutato forma, ma il valore gli è rimasto lo stesso. Ragionate così se ciascun grano voi lo dividerete in tornesi, e ciascun tornese in cavalli; nel primo caso il ducato diventerà dugento tornesi, nel secondo mille e dugento cavalli, e voi sarete persuasi, che dugento tornesi equivalgono al valore di un ducato, e che al medesimo ammontano i cavalli mille e dugento. Da ciò conchiuderete; : *Vi sono grandezze divisibili in parti, senza che perdano menomamente di valore.*

Considerate al contrario diviso in parti un arboscello, un fiore, una canna, e più non sarà canna, non più fiore, non più arboscello: questi sono esseri, che suppongono la vicinanza, la simultaneità, la continuazione delle parti: essi debbono presentarsi insieme all' azione dello spirito. Supposti per poco interrotti i canali, per cui circolano gli umori, più non avranno consistenza le radici, non più i frutti, più non avrà vita e forma la pianta: esisterebbe ne' suoi elementi, ma non già nell'essere di arboscello, di fiore, di canna. Se voi considerar li volete come *arbore*, *fiore*, *canna*, siete necessitati a considerarne unite e simmetricamente disposte le parti. Esse debbono presentarsi assolutamente insieme, in un ordine, in un tutto continuato e convenevolmente disposto.

Vi è differenza dunque tra le grandezze prime e le secon-

de. Le prime non sono alterate nel valore e nell' uso dalle divisioni e suddivisioni, cui soggiacciono: esse vogliono sempre lo stesso determinato numero di parti; se al ducato si toglie o si aggiunge una parte, come o un grano o un tornese, cessa di essere ducato. Le seconde possono o accrescere o diminuire nella nostra mente, senza diminuirsene il concetto; così potrò io concepire un arbore o più grande o più piccolo, un fiume o più ampio o più ristretto, senza che l' idea o di arbore o di fiume venisse menomamente alterata.

Così essendo, a diverse cose diversi nomi convengono.

Le grandezze prime, che supponghiamo divise in un certo numero di parti e non in altro, di un certo dato valore e non di altro, e che non ricevono discapito dal considerarsi disgregate le parti, le diremo *grandezze discrete*; le grandezze seconde, perchè suppongono la continuazione, proporzione e simmetria delle parti, le diremo *continue*.

Le grandezze dunque dividonsi in *discrete* e *continue*.

## § 4.

### *Principio distintivo delle due cennate grandezze.*

Giovanetti, voi avete inteso ragionare delle grandezze discrete e delle continue. Conviene intanto soggiungere una riflessione, che stabilirà vieppiù la distinzione tra le mentovate grandezze. Voi siete in questo ammirabile universo, e fate parte di esso. Infinite grandezze cadono sotto i vostri sensi: infinite forze vi giocano d' intorno: infiniti rapporti vi ligano agli elementi circostanti. Voi osservate intorno girarvi le stelle, romoreggiare il tuono, scorrere il vento e le onde, passare i secoli dinanzi per non più ritornare. Or di tante grandezze, nel cerchio delle quali voi siete, quali sono grandezze discrete, e quali continue? Io vi propongo un metodo semplicissimo, che vi riuscirà grato per certo.

Vi sono grandezze che risultano dalla semplice ripetizione dell' elemento primitivo. L' elemento di un ducato è il *grano*, se pur non vogliasi il *tornese*, o il *cavallo*; ora a formare il ducato altro non si richiede, che l' aggiunzione di questo grano a se stesso, ripetuta cento volte. L' elemento del secolo è il *minuto*; or ripetete e sempreppiù ripetete il *minuto*, e voi senza null' altro vi troverete a capo del secolo. Così la ripetizione della velocità primordiale genera una velocità incredibile.

Dalchè conchiuderete: *vi sono grandezze, le quali risultano dalla semplice ripetizione del primo elemento.*

Considerate d' altronde un' edificio, una sedia, una finestra, e simili. Queste sono consimilmente grandezze; ma non nascono dalla ripetizione dell' elemento primo. Prendete un sasso, e poi un altro sasso, e poi aggiungetevi il terzo, il quarto, ec. ec. voi formerete un mucchio di sassi, ma non già un edifizio; chè a formare questo non basta aggiungere sassi, ma è necessaria la disposizione, l' ordine, la simmetria, il fine. Ragionate così di una finestra ec. Dal che conchiuderete: *vi sono grandezze, alla genesi delle quali non basta l' aggiunzione dell' elemento primo, ma vi è bisogno di ordine, disposizione, simmetria* ec.

Le grandezze prime le direte *discrete*, le seconde *continue*.

*Avvertimento.*

Sebbene le unità noi divise le avessimo in *reali* ed *ideali*, *astratte* e *concrete*, *continue* e *discrete*, pure tutte si riducono a quest' ultime, alle discrete cioè ed alle continue. Le grandezze infatti o astratte o concrete, o reali o ideali, o formano numero determinato, o sono considerate in loro stesse: nel primo caso formano grandezze discrete, e nel secondo continue. Così 100 alberi formeranno una grandezza discreta, perchè 100 alberi nascono dalla ripetizione del primo elemento *albero*; ma l' albero istesso, abbisognando nel suo essere di continuazione di parti, ordine, simmetria, ec. e non originandosi dalla ripetizione del primo elemento, è grandezza continua.

## § 5.

*Grandezze concrete ed astratte.*

Abbiate, o giovanetti, presente al vostro sguardo un pezzo di marmo o levigato o scabro. Voi considererete in esso la figura, la estensione, la lunghezza, l' altezza, la solidità, ec. Voi potrete considerare tutte queste qualità insieme unite ed aderenti al medesimo soggetto, ed avrete così l' idea del corpo: potrete d' altronde considerare cadauna di queste qualità separatamente ed isolatamente dal suo soggetto, e separatamente ed isolatamente dalle altre qualità concomitanti, ed allora non avrete che l' idea di una qualità sola, come della sola lunghezza, o della sola estensione ec. La vostra mente dunque ha la facoltà di conside-

rare l' unità nell' insieme degli elementi che la costituiscono tale, e può altresì considerare ciascun elemento separatamente e disgiuntamente dagli altri. Si può *astrarre* insomma, mentre *astrarre* in filosofia suona lo stesso che *separare*.

Vi sono dunque grandezze considerate nel complesso totale ed indivise dalle restanti qualità dell'oggetto, come la velocità nel fulmine, nella ruota, nel fiotto della tempesta e simili; e vi sono grandezze considerate fuori della riunione delle altre, separate, isolate, e filosoficamente parlando, *astratte*, come la velocità, la forza, lo spazio in generale, e simili.

Più brevemente: sonovi unità o grandezze *prese concretamente*, ed unità o grandezze *prese astrattamente*.

## § 6.

### *Idea della Matesi.*

Nella prima considerazione, o giovanetti, abbiamo sciolto l' insieme delle cose simili in tante *unità particolari:* nella seconda abbiamo distinto le unità decomponibili dalle indecomponibili, ossia, le *reali* dalle *ideali*: nella terza le grandezze *discrete* dalle *continue*: nella quarta le *astratte* dalle considerate in *concreto*.

Or di tali grandezze, sieno ideali sieno reali, sieno continue sieno discrete, sieno astratte sieno concrete, per conoscerne la quantità ed il valore, è necessario che si paragonino fra loro, che si disaminino i loro rapporti, che si analizzino i loro componenti, le loro origini e le loro specifiche trasformazioni; è necessario insomma stabilire alcuni principii, alcune regole per elevare il loro calcolo e la loro giusta stimazione.

Nè ciò basta. A che gioverebbe il conoscere la quantità ed il valore di queste denotate grandezze, se non si applicassero agli usi di nostra vita? Non sono utili cognizioni quelle, che non migliorano le arti e le scienze, non procurano i vantaggi dell' uomo, non ne minorano i bisogni. Sono necessarii i principii e le regole, ma sono necessarie ancora le loro rispettive applicazioni. Tali principii e tali applicazioni, per averle ad un sol colpo d' occhio e renderle più dell' uso, conviene congregarle in un sol corso, in un sol trattato, in un saggio. Un corso, un trattato, un saggio, che contenga i principii, come mettere a calcolo le grandezze, come scovrirne i loro valori, e nel tempo stesso ce ne additi

l'uso e le rispettive applicazioni, dicesi *Corso di scienze matematiche*, e più brevemente *Matesi.*

## § 7.

### *Divisione delle Matesi.*

Quantità discrete e quantità continue formano l'oggetto delle Matematiche. Esse si versano sul calcolo di queste due spezie di quantità, ne divisano le origini, i rapporti ed i valori: ne determinano gli usi e le principali applicazioni. Ma voi l'osservaste; la genesi delle une è ben diversa dalla genesi delle altre: l'idea, che deve associarsi alle prime, non è l'idea da associarsi alle seconde: ne è diversa la natura, la condizione, il valore. Quindi si è che i principii, su i quali si fonda la dottrina delle une, sono diversi da' principii, su i quali si fonda la dottrina delle altre: l'ordine, il sistema, il fine è ben diverso. Ma diversità di genesi, di principii, di mezzi, di fine, e di natura mena a diversità di scienze: la scienza dunque delle Matesi dee considerarsi come duplice.

Matesi, che si occupa a calcolare le grandezze discrete.
Matesi, che si occupa a calcolare le grandezze continue.
La Matematica dunque è divisibile in due corsi.
*Corso di Matematica discreta.*
*Corso di Matematica continua.*

## § 8.

### *Divisione della Matematica discreta.*

Giovanetti, io mi propongo due quantità *mille ottocento trentacinque*, e nel tempo stesso un'altra quantità *ottocento ventinove*, e cerco sapere di quanto la prima sorpassi in valore la seconda. Mi occupo de' mezzi, onde giungere a tale scopo, e dopo avere istituito il mio calcolo, trovo che il residuo è uguale a *mille e sei*. Dico dunque così « la quantità *mille ottocento trentacinque*, diminuita della quantità *ottocento ventinove*, è uguale a *mille e sei* ».

Dopo ciò, io non penserò più alla quantità determinata *mille ottocento trentacinque*, e molto meno alla quantità *ottocento ventinove*: vorrò considerare le cose in generale, e mi farò la domanda « *date due quantità disuguali, come conoscere di quanto la*

*maggiore superi la minore?* Consocio l'idea della quantità maggiore alla lettera *A*; per *A* vorrò intendere ogni qualsiasi quantità, sia forza, sia moto, sia velocità, sia tempo, sia numero: dinoterà ella una quantità in generale. Consocio similmente l'idea della quantità minore alla lettera *B*, volendo intendere per *B* ogni qualsiasi quantità: sarà anche ella una quantità in generale qualunque.

La domanda dunque « *date due quantità disuguali, come rinvenire di quanto la maggiore superi la minore?* » si può ridurre alla seguente « *A di quanto supera B?*

Mi occupo de' mezzi, come conoscere un tale avvanzo, e dopo averlo rinvenuto, consocio l'idea di detto avvanzo alla lettera X; e dico « A *diminuito di B è uguale ad X* ». Per rendere più breve una tale frase, l'idea di diminuzione la consocio al segno di un tratto lineare —, e l'idea d'uguaglianza la consocio a due tratti lineari = Tali segni li dico *convenzionali*, perchè per una convenzione fra i Matematici si sono adottati questi piuttosto che altri. Dirò allora « A—B=X, ossia A *meno* B= *alla quantità* X.

Io posso dunque sottoporre al mio calcolo alcune quantità determinate di numero, di uso e di valore, ovvero sottoporre al mio calcolo sieno spazii, sieno forze, sieno rapporti generali di generali quantità con segni e cifre convenzionali, che esprimono quantità indeterminate, come dall'addotto esempio è chiaro.

La scienza, che si occupa a calcolare le grandezze specificate e determinate in numero ed in valore, dicesi *Aritmetica* dal greco αριτμος (aritmos) che significa *numero*. La scienza, che si occupa a calcolare le grandezze in generale con segni universali, dicesi *Algebra*, in altri termini *scienza degli universali*. La Matesi dunque discreta si suddivide in *Aritmetica* ed *Algebra*.

Saranno questi i due corsi, o giovanetti, che percorrerete nelle giornaliere lezioni. Io ve li presenterò in due volumetti, ciascuno de' quali non chiederà altro tempo, che breve spazio di pochi mesi, dopo de' quali voi sarete nello stato di mettere a calcolo qualsivoglia grandezza discreta, sia determinata, sia generale. Lo studio, la pazienza, e l'esercizio vi acquisteranno il pregio di sì utili e necessarie cognizioni. Ne conoscerete in prosieguo la commendevole eccellenza ed il vantaggio.

*Avvertimento.*

Non credasi però che la differenza fra l' *aritmetica* e l' *alge-*

*bra* consista nella sola generalità delle formole: questa agevola mirabilmente il calcolo delle quantità, ma non ne costituisce il mezzo indispensabile. Lo scopo immediato dell'Algebra è la ricerca delle funzioni, e per *funzione* intendono i Matematici la dipendenza de' valori. L'Algebra si propone di ritrovare la dipendenza de' valori, e l'Aritmetica li determina. Intanto non potendo i giovanetti ancora aver chiarezza del significato ed uso delle *funzioni* e de' veri caratteri di distinzione di ufficio tra le due scienze sorelle, si è stimato più opportuno differenziarle per quel prospetto, che per ora loro si offre più intelligibile.

# TITOLO II.

## DELLA NUMERAZIONE.

### § 1.

*Idea della numerazione.*

L'Aritmetica si è *la scienza del calcolo delle grandezze discrete.* Ma siccome le grandezze discrete si rappresentano co' numeri, perciò l'Aritmetica si definisce più comunemente « *la scienza de' numeri* ».

Il numero è la ripetizione dell' unità astrattamente considerata. Riunite più unità elementari, e voi avrete già formato un *numero.* Queste unità, nelle cose commensurabili, o sono stabilite per semplice convenzione, come *le canne*, per esempio, *il miglio*, ec. o sono indicate dalla stessa natura, come il *giorno*, a cui si riduce la misura del tempo.

Ma come debbonsi essi disporre per formare una quantità determinata? Avranno essi una legge, un ordine da eseguirsi? Quel trattato di Aritmetica, che impara le leggi ed i modi, come comporre i diversi numeri, come parlarli, come scriverli, come distinguerli, si dice *sistema di numerazione*, la quale si dirà o parlata o scritta, secondocchè o a parlare, o a scrivere i numeri, le rispettive sue regole dirigga. Ecco ciò che forma l'oggetto delle seguenti lezioni.

Ad apprendere chiaramente il sistema fondamentale della nu-

merazione, uopo è por mente: 1. alle cifre de' numeri semplici; 2. all' origine de' numeri composti; 3. alla posizione de' numeri; 4. all' ortografia de' numeri; 5. finalmente alla lettura o prosodia de' numeri.

## § 2

*Delle cifre de' numeri semplici, e dello zero.*

Tutto ciò, che viene considerato come solo distinto e separato da ogni altro, si dice dagli Aritmetici *Unità* (Tit. 1. § 1.). Per una convenzione la esprimono colla cifra —— 1
Il complesso di *due unità* col segno —— 2
Quello di *tre* —— 3
Quello di *quattro* —— 4
Quello di *cinque* —— 5
Quello di *sei* —— 6
Quello di *sette* —— 7
Quello di *otto* —— 8
Quello di *nove* —— 9

Le cifre quindi di Aritmetica sono le dinotate 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Esse si dicono *significative*, perchè la prima esprime unità, e le altre collezioni di unità. A queste si aggiunge un' altra cifra, chiamata *zero*, ed è espressa col segno 0. Questa isolatamente presa, ed in se considerata, non esprime alcun valore: essa si addinoma *inesprimente*.

Ma però se, considerato lo *zero* isolatamente, nulla per se significhi, è segno non pertanto di doversi accrescere il valore delle cifre espressive dieci volte dippiù, ogni qualvolta loro vien posto a fianco destro: così se dopo al 3 si scrive lo *zero* 0, p. e. 30, il valore in tal caso non è più 3, ma *dieci volte* 3, ossia *trenta*: e e se dopo il 30 si appone altro zero 300, il valore di 30 diventerà dieci volte dippiù, ossia *trecento*.

Le cifre dunque Aritmetiche sono dieci, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, delle quali otto sono numeri, ossia il 2, il 3, il 4, il 5, il 6, il 7, l'8, il 9: l'1 è *principio elementare* di numero: lo *zero*, ossia 0, è cifra inesprimente, che non ha per se valore alcuno, ma posta a destra di altri numeri li accresce di un valore, che è dieci volte dippiù, e per tal ragione prende il nome di *cifra ausiliaria*.

## § 3.

*Formazione de' numeri composti sino al milione.*

I numeri sopramentovati non si estendono col valore se non a nove unità ; ma aggregandosi con certe leggi fra loro, possono esprimere altri numeri maggiori e maggiori.

È legge in fatti *dell' unità* che, coll' aggregarsi dieci volte, prenda diversa denominazione e dicasi *dieci*.

Il dieci coll'aggregarsi e ripetersi dieci volte, cambia nomenclatura, e dicesi *cento*.

Il cento ripetendosi dieci volte si chiama *mille*.

Il mille preso dieci volte, dicesi *diecimila*.

Onde per l'ajuto della memoria, è utile, anzi necessario, imparare la tavola seguente:

| | | |
|---|---|---|
| 1. ——— *Unità* | | |
| 2. dieci *unità*, ossia | —— | dieci |
| 3. dieci volte *dieci*, ossia | —— | cento |
| 4. dieci volte *cento*, ossia | —— | mille |
| 5. dieci volte *mille*, ossia | —— | diecimila |
| 6. dieci volte *diecimila*, ossia | —— | centomila |
| 7. dieci volte *centomila*, ossia | —— | milione |

Una tale gradazione di numeri da luogo alla considerazione, che siegue. Sapendo voi che lo zero, ossia il segno 0, posto a destra di un numero semplice o composto, accresce questo di un valore dieci volte di più, vi sarà facile far passare un numero minore ad un numero decuplo, ossia dieci volte maggiore, e ciò con appórgli a destra il segno *0*. Sicchè la cifra semplice seguita da un solo *0* dinoterà *dieci, venti, trenta, quaranta, cinquanta, sessanta, settanta, ottanta, novanta*, secondochè comincerà a sinistra da 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, così:

| | | |
|---|---|---|
| 10 | vale —— | dieci |
| 20 | —— | venti |
| 30 | —— | trenta |
| 40 | —— | quaranta |
| 50 | —— | cinquanta |
| 60 | —— | sessanta |
| 70 | —— | settanta |
| 80 | —— | ottanta |
| 90 | —— | novanta |

2. Ogni cifra seguita da due zeri dinoterà centinaja, quindi

| | |
|---|---|
| 100 | vale —— cento |
| 200 | —— duecento |
| 300 | —— trecento |
| 400 | —— quattrocento |
| 500 | —— cinquecento |
| 600 | —— seicento |
| 700 | —— settecento |
| 800 | —— ottocento |
| 900 | —— novecento |

3. Ogni numero semplice seguito da tre zeri dinoterà migliaia (1) così:

| | |
|---|---|
| 1,000 | —— mille |
| 2,000 | —— due mila |
| 3,000 | —— tre mila |
| 4,000 | —— quattro mila |
| 5,000 | —— cinque mila |
| 6,000 | —— sei mila |
| 7,000 | —— sette mila |
| 8,000 | —— otto mila |
| 9,000 | —— nove mila |

4. Ogni numero semplice seguito da quattro zeri dinoterà decine di migliaia, così:

| | |
|---|---|
| 10,000 | vale —— diecimila |
| 20,000 | —— ventimila |
| 30,000 | —— trentamila |
| 40,000 | —— quarantamila |
| 50,000 | —— cinquantamila |
| 60,000 | —— sessantamila |
| 70,000 | —— settantamila |
| 80,000 | —— ottantamila |
| 90,000 | —— novantamila |

5. Ogni numero semplice seguito da cinque zeri dinoterà centinaia di migliaia così:

| | |
|---|---|
| 100,000 | vale —— centomila |
| 200,000 | —— duecentomila |

(1) A maggior chiarificazione nello scrivere i numeri, sogliono gli Aritmetici dopo i tre zeri, cominciando da destra, apporre una virgola, che pronunziano *mille* o *mila*, come 2,000 *duemila*, 3,000 *tremila* e simili.

| | | |
|---|---|---|
| 300,000 | vale —— | trecentomila |
| 400,000 | —— | quattrocentomila |
| 500,000 | —— | cinquecentomila |
| 600,000 | —— | seicentomila |
| 700,000 | —— | settecentomila |
| 800,000 | —— | ottocentomila |
| 900,000 | —— | novecentomila |

6. Ogni numero semplice seguito da sei zeri dinoterà decine di centinaia di migliaia, ossia milione (1) così:

| | | |
|---|---|---|
| 1,000,000 | vale —— | un milione |
| 2,000,000 | —— | due milioni |
| 3,000.000 | —— | tre milioni |
| 4,000,000 | —— | quattro milioni |
| 5,000,000 | —— | cinque milioni |
| 6,000,000 | —— | sei milioni |
| 7,000,000 | —— | sette milioni |
| 8,000,000 | —— | otto milioni |
| 9,000,000 | —— | nove milioni |

## §. 4

### *Formazione di numeri composti dal milione al bilione, al trilione, ec.*

Da' milioni si passa a' bilioni dopo aver fatto tante aggregazioni di milioni, quante aggregazioni di unità vi sono state necessarie per giungere al milione; sicchè cominciando dal settimo luogo, in cui avete stabilito doversi apporre il milione, direte:

7. Milione
8. Dieci volte *i milioni* formano — decine di milioni
9. Dieci volte le *decine di milioni* — centinaia di milioni
10. Dieci volte le *centinaia di milioni* — migliaia di milioni
11. Dieci volte le *migliaia di milioni* — decine di mig. di mil.
12. Dieci volte le *decine di migliaia di milioni* — cent. di mig. di mil.
13. Dieci volte le *centinaia di migliaia di milioni* — bilione

(1) Anche qui si verifica doversi apporre una virgola dopo il secondo ternario di zeri, e scrivere 1,000,000 ***un milione***, 2,000,000 ***due milioni***, e simili. Suolsi parimenti sul milione, ossia sulla settima cifra apporre un apice col segno ', e scrivere 1',00,000 ***un milione***.

Voi scrivete così:

| | |
|---:|---|
| 1,000,000 | milione |
| 10,000,000 | dieci milioni |
| 100,000,000 | cento milioni |
| 1,000,000,000 | mille milioni |
| 10,000,000,000 | diecimila milioni |
| 100,000,000,000 | centomila milioni |
| 1,000,000,000,000 | bilione (1) |

*Avvertimento.*

Dalla esposta origine e graduazione de' numeri composti è facile osservare, che alla genesi de' milioni concorrono *unità* semplici, da dieci volte a dieci volte con diversa nomenclatura ripetute: ma alla genesi del bilione concorrono non unità semplici, ma pieni e formati *milioni*. Se risolvere vorrete il milione in sette degradazioni, come a formarli a riverso per sette gradazioni si è asceso, voi troverete all'elemento primo l'*unità*; ma se vorrete risolvere il bilione, dopo sette degradazioni, voi troverete il *milione*. Sicchè ne sorge esservi bisogno di tanti milioni a formare il bilione, quante unità sono necessarie a formare il milione.

Così si può conchiudere esservi, alla formazione del trilione, bisogno di tanti *bilioni*, quanti milioni abbisognano a formare il bilione, e così in prosieguo.

## §. 5

*Ortografia de' numeri composti.*

Giovanetti, dalla semplice ispezione delle due tavole precedenti avete osservato, che le unità cadono al *primo luogo*, contando da destra, le diecine al *secondo*, le centinaia al *terzo*, ec.

Voi per ajuto della memoria imparerete la tavola seguente, la quale per altro non è, che una trasformazione della precedente,

| | | |
|---|---|---|
| Le *unità* cadono al | —— | 1. luogo |
| Le decine al | —— | 2. |
| Le centinaia | —— | 3. |
| Le migliaia | —— | 4. |

(1) Anche su' bilioni sogliono gli Aritmetici apporre per maggior distinzione l'apice 2; così $1^{2}$,000,000$^{1}$,000,000, vale un *bilione*, $4^{2}$,000,001$^{1}$,000,000 vale *quattro bilioni*, e così i somiglianti.

Le decine di migliaia —— 5. luogo
Le centinaia di migliaia —— 6.
Le decine di centinaia di migliaia,
ossia *milioni* —— 7.
Le decine di milioni —— 8.
Le centinaia di milioni —— 9.
Le migliaia di milioni —— 10.
Le decine di migliaia di milioni —— 11.
Le centinaia di migliaia di milioni —— 12.
Le decine di centinaia di milioni
ossia *bilioni* —— 13.
Le decine di bilioni —— 14.
Le centinaia di bilioni —— 15.
Le migliaia di bilioni —— 16.
Le decine di migliaia di bilioni —— 17.
Le centinaia di migliaia di bilioni —— 18.
Le decine di migliaia di bilioni,
ossia *trilioni* —— 19, e così proseguendo

Voi volete dunque disporre il numero *quattromila cinquecento ventiquattro*? Scioglietelo ne' suoi componenti 4 *migliaia*, 5 *centinaia*, 2 *decine*, 4 *unità*, e date a ciascun componente il suo luogo, cioè alle 4 *migliaia* il quarto luogo, alle 5 *centinaia* il terzo luogo, alle 2 *decine* il secondo, alle 4 *unità* il primo luogo, e scrivete *4524*. Volete voi disporre il numero, « *venticinque milioni settecentomila quattrocento e due*? Scioglietelo nei suoi componenti, e lo troverete uguale a due *diecine di milioni*, che debbono allogarsi all' ottavo luogo: 5 *unità di milioni* al settimo luogo: 7 *centinaia di migliaia* al sesto luogo: 4 *centinaia* semplici al terzo luogo: 2 *unità* al primo luogo, e mancano le *decine di migliaia*, e le *decine* semplici: voi farete occupare questi posti vuoti dalle cifre inesprimenti, ossia *zeri*. Questi serviranno solo a dinotare la mancanza delle cifre espressive ne' dinotati posti, ed a dare a ciascun numero la rispettiva distanza; voi scrivete dunque

| luogo 8. | luogo 7. | luogo 6. | luogo 5. | luogo 4. | luogo 3. | luogo 2. | luogo 1. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 5 | 7 | 0 | 0 | 4 | 0 | 2 |

Ragionate così di ogni altro numero, e scrivete sempre assegnando a ciascun componente il suo luogo. L' esercizio, ch' è il

più efficace maestro, vi renderà in breve tempo in ciò eseguire speditissimi. Voi chiamerete tale operazione *modo di scrivere i numeri*, e con greco vocabolo *Ortografia de' numeri.*

A maggior chiarificazione dell' oggetto, util cosa io stimo aggiungere i due esempii, che sieguono

*Esempio 2.* — Sia da scriversi il numero *diecimila milioni ottocento mila e sette.* S' istituisca l' analisi seguente. Il predetto numero costa

1. di migliaia di milioni, che cadono al luogo —— 11.
2. di centinaia di migliaia, che cadono al luogo —— 5.
3. di *sette unità*, che cadono al luogo —— 1.

Tutte le figure quindi sono dieci, ma solo il *decimo* luogo, il *quinto*, e il *primo* a destra offrono cifre espressive: tutti gli altri luoghi, a serbare le dovute distanze ed i dovuti significati, saranno occupati da *zeri*, e scriverete così 10, 100, 800, 007.

*Esempio 3.* — Sia il numero *sette trilioni*, *cinquantadue bilioni*, ed *ottocento.* Tale numero costa

1. di unità di trilioni, luogo —— 19.
2. diecine di bilioni, —— 14.
3. unità di bilioni —— 13.
4. centinaia —— 3.

Tutto il numero dunque costa di 19 figure, ma il 19.°, il 14.° ed il 3.° contano cifre espressive; ne' rimanenti siano inframessi gli zeri, e si scriva 7,000 050, 000, 060 000, 800.

## § 6.

### *Lettura de' numeri composti.*

Voi sapete oramai scrivere qualunque numero, ma vi è necessario ancora imparare a leggere speditamente ogni serie numerica, che vi si parasse d' innanti. Voi non dovete sempre scrivere, dovete leggere ancora; ecco l' oggetto, che deve richiamare la vostra attenzione.

Sia dato dunque a leggere il numero 45678022004568923.

Per giungere facilmente allo scopo dividete i numeri a tre a tre, e ne avrete 45, 678, 022, 004, 568, 923. Indi considerate cadaun ternario, ed osservate che il primo a destra dinota unità, decine e centinaia, ma di *unità*: il secondo unità, diecine e centinaia, ma di *migliaia*: il terzo unità, diecine, centinaia, ma di *milioni*: il quarto unità, diecine, centinaia, ma di *migliaia di milioni*: il quinto unità, decine, centinaia, ma di *bilioni* ec. ec.

Che perciò tutt' i ternarii pari prendono la parola *mila*, ed i ternarii dispari prendono la parola, *unità*, *milioni*, *bilioni*, ec. Questi ternarii dispari a maggior precisione possono distinguersi cogli apici, 1, 2, 3, 4, cioè *unità*, *milioni*, *bilioni*, *trilioni*, ec. Il numero proposto diverrà 45, $678^{3}$, 022, $004^{1}$, 568, 923.

Leggete ora cadaun ternario nelle sue *centinaia*, *decine*, ed *unità*, e non vi dimenticate di mettere il *mila* a tutt' i ternarii pari, ossia a quelli, che sono notati colla sola virgola, e di aggiungere *bilioni*, *milioni*, ec. a quelli, che sono notati cogli *apici* 2, 1, 0. Voi direte dunque così « *quarantacinque mila*, *seicento settantotto bilioni*, *ventidue mila e quattro milioni*, *cinquecento sessantotto mila*, *novecento ventitrè unità*. Tale operazione voi la direte *lettura*, *pronunzia*, *prosodia de' numeri*.

*Esempio* 2. — Sia da leggersi il numero 289357893
Si divida il numero dato a tre a tre, e diverrà

289, 357, 893.

Si apponga l'apice 1 sopra la cifra del settimo luogo, ossia sopra 9 del terzo ternario e si avrà

$789^{1}$, 357, 893.

Si dia il *milione* al 9, il *mila* alla cifra seguita dalla virgola, e si legga da ternario a ternario: *settecento ottantanove milioni*, *trecento cinquantasettemila*, *ottocento novantatre*.

*Esempio* 3. — Sia da leggersi il numero 50407567893567,
Diviso in ternarii diverrà

$50^{2}$, 407, $567^{1}$, 893, 567.

Leggendo i ternarii, si dirà *cinquanta bilioni*, *quattrocento e settemila*, *cinquecento sessantasette milioni*, *ottocento novantatre mila*, *cinquecento sessantasette*

*Esempio* 4.—Sia da leggersi 1000045007112000000787567
questo diverrà

$1^{4}$,000,$045^{3}$,007,$112^{2}$,000,$000^{1}$,787,567

si leggerà
*un quatrilione, quarantacinque trilioni, settemila, cento e dodici bilioni, settecento ottantasette mila, cinquecento sessantasette.*

## § 7.

*Sistema di numerazione presso i Francesi.*

I Francesi non compongono il bilione di *dieci cento mila milioni* ma semplicemente di *mille milioni*: così il trilione di *mille bilioni*, il quatrilione di *mille trilioni* ec. Che però essi dopo il terzo ter-

nario aprono il milione, come gl' Italiani, al quarto ternario il bilione, al quinto il trilione, al sesto il quadrilione ecc. Dato quindi il numero

70,829,356,789,500,234,976,128,

lo dividerebbero e distinguerebbero così

$70^6$, $829^5$, $356^4$, $789^3$, $500^2$, $234^1$, 976, 128,

e lo leggerebbero *settanta sestilioni*, *ottocento ventinove quintilioni*, *trecento cinquantasei quatrilioni*, *settecento ottantanove trilioni*, *cinquecento bilioni*, *duecento trentaquattro milioni*, *novecento settantaseimila*, *cento ventotto.*

## § 8.

*Sistema di numerazione presso i Romani.*

Giovanetti, a voi occorrerà ben soventi leggere i libri antichi e principalmente i latini, ne' quali troverete certamente numeri Romani: perlocchè non vi sia discaro apprendere il facilissimo modo, come scrivevano que' famosi guerrieri e conquistatori del mondo i loro numeri.

Essi avevano sette lettere I. V. X. L. C. D. M. ossia *unità*, *cinque*, *dieci*, *cinquanta*, *cento*, *cinquecento*, *mille*. Le leggi di loro numerazione si riducono alle seguenti

1. *Le lettere I. X. C. possono ripetersi tre volte* così: I *uno*, II *due*, III *tre*; così X *dieci*, XX *venti*, XXX *trenta*, ec. ec.

2. *Una lettera di minor valore che precede la lettera di maggior valore dinota, che la maggiore si deve diminuire del valore indicato dalla minore*; così IV vuol dire che da *cinque* bisogna togliere 1, e la frase IV=4; così IX= 9, XC=90, CD=400.

3. *Una lettera di minor valore, che siegue alla lettera di maggior valore, dinota che al numero maggiore si deve aggiungere il minore*; così VI=6, XII=12, LXXX=80; onde si dà luogo alla tavola seguente.

| | | |
|---|---|---|
| I | —— | uno |
| II | —— | due |
| III | —— | tre |
| IV | —— | quattro |
| V | —— | cinque |
| VI | —— | sei |
| VII | —— | sette |
| VIII | —— | otto |
| IX | —— | nove |

X —— dieci
XI —— undeci
XII —— dodici
XIII —— tredici
XIV —— quattordici
XV —— quindici
XVI —— sedeci
XVII —— diciassette
XVIII —— diciotto
XIX —— diciannove
XX —— venti
XXI —— ventuno
XXII —— ventidue
XXIII —— ventitre
XXIV —— ventiquattro
XV —— venticinque
XVI —— ventisei
XXVII —— ventisette
XXVIII —— ventotto
XXIX —— ventinove
XXX —— trenta
XL —— quaranta
L —— cinquanta
LX —— sessanta
LXX —— settanta
LXXX —— ottanta
XC —— novanta

| C | CC | CCC | CD | D | DC | DCC | DCCC | CM | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 | 1000 |

| MM | MD |
|---|---|
| 2000 | 1500 |

# TITOLO III.

## DELLE OPERAZIONI FONDAMENTALI.

### § 1.

*Date più serie di numeri, sommarle.*

Giovanetti, nell' operazione indicata si cerca sapere un numero, che contenga l' insieme di tutte le serie numeriche date. Questa operazione si dice *Somma, Addizione*, e sommare, addizionare vuol dire *congregare, riunire in un sol tutto altri tutti minori dati*. Quel numero, che riunisce o in se rappresenta l' insieme de' numeri minori, dicesi *Aggregato*.

Prima che ci facessimo ad esporre le regole da tenersi per giungere all'indicato scopo, giovevole è premettere una facilissima considerazione. Se i numeri aggiunti costassero di poche unità, o di poche decine, non sarebbe difficile all'umano intelletto coglierne immediatamente la somma ed indicarla. Così proposto ad ogni uomo, e fosse pure di ruvido ingegno, due numeri, p. es. 4 e 5, egli dirà tantosto essere uguali a 9, 20 e 5 uguali a 25, 7 e 7 uguali a 14. Non così però se si dassero a sommare svariate serie di numeri troppo complessi, come 625 da sommarsi con 2073 e 22329, ec. Allora l'operazione sarebbe difficoltosa: perchè ingegno, vasto che sia, non può cogliere in breve tempo a qual numero maggiore siano uguali i tre dati numeri minori insieme presi. Per giungere a ciò, uopo è proporre un metodo agevole e spedito, il quale non può aversi senza istituire un breve ragionamento.

1. I *tutti* o *grandezze*, che vogliono addizionarsi, debbono essere commensurabili per le medesime unità elementari. Così possono addizionarsi i secoli, gli anni, i mesi, i giorni, e le ore, perchè sono commensurabili e riducibili al solo elemento *minuto*; così possono addizionarsi i ducati, i carlini, e le grana; così le canne, ed i palmi; così i secoli ed i giorni; perchè i primi sono riducibili a *cavalli*, le seconde ad *once*, i terzi ad *ore* e simili. Ma non sono addizionabili le *canne*, le *leghe*, i *piedi*, poichè sebbene sono omogenei, riferendosi tutti alla medesima specie di quantità, ossia alla *lunghezza*, pure non si commensurano col medesimo elemento; altre misure contando le canne, altre le leghe, ed altre i piedi.

2. Il numero maggiore, che dovrà contenere tanti dati numeri minori, non può contenerli, se non riunirà in se le parti de' *tutti* dati; per lo che riunite voi le parti de' numeri minori, e voi avrete un numero maggiore, che sarà uguale a tutte le serie minori. Ma poichè le parti dei numeri sono le unità, decine, centinaia ec: dunque chi riunirà tutte le unità, le decine, le centinaia ec: delle serie date, e ne noterà i rispettivi aggregati in una sola serie numerica, avrà certamente un numero uguale a tutte le serie date.

La massima quindi, che regola l'addizione de' numeri, è la seguente: « *chi riunisce le parti de' tutti minori, avrà un tutto uguale a' dati* « e più brevemente » *chi riunisce le parti, riunisce i tutti.* » Di questa verità voi ne siete così persuasi, che vi è impossibile concepire il contrario: questa verità vi risalta così lucidamente innanti al pensiero, che niun sospetto d'inganno, niuna malagevolezza a capirle insorgerà: voi la direte *vero primigenio, vero connaturale, innegabile,* e con vocabolo matematico *assioma.*

3. Stabilito l'*assioma* o *innegabile verità primitiva,* che conduce alla soluzione dell'indicato problema, è assai pregevole cosa occuparci de' mezzi come agevolmente ottenerla. I mezzi, dicono i filosofi, emergono dalla natura istessa delle cose: i mezzi sono un opportuno intermedio tra il principio ed il fine: debbono quindi da questi direttamente procedere. Or se la regola si è di riunire le parti delle serie date: conviene, che queste parti sieno così disposte, che possano esse ad un colpo d'occhio percorrersi. Debbonsi dunque disporre le serie in modo, che le unità corrispondano alle unità, le decine alle decine, le centinaia alle centinaia ec. Primo mezzo si è dunque: *scrivere i numeri l'un sotto l'altro colla legge della corrispondenza locale.* Un tal mezzo procede dal principio.

4. Dall'altro canto; il fine si è di ritrovare un tutto equivalente a' dati, cioè un tutto, le di cui unità fossero l'insieme delle unità sparse nelle serie date, le decine l'insieme delle decine, le centinaia l'insieme delle centinaia ec. A ciò ottenere è di necessità, che i diversi aggregati siano regolarmente registrati; cioè la collezione delle unità sotto la colonna delle unità; la collezione delle decine sotto la colonna delle decine; la collezione delle centinaia sotto la colonna delle centinaia ec. Seconda regola si è dunque: *scrivere i diversi aggregati sotto le rispettive colonne, da cui si sono ricavate.*

5. Che diremo poi se l'aggregato delle unità fosse uguale o maggiore di una decina? Un'aggregato, ch'esprime una o più decine, può scriversi sotto la colonna delle unità? No; ciò sarebbe

introdurre un disordine nella scrittura de' numeri. Riserberete piuttosto la decina, o le decine ritrovate, per aggiungerle alla seguente collezione delle decine, ed il solo avvanzo, dinotante unità, lo scriverete sotto la colonna delle unità. Se questo avvanzo non vi fosse, e l'aggregato dinotasse semplicemente decine, voi dinoterete la mancanza delle unità con piazzare sotto la sommata colonna lo zero 0. Ragionate così se dall'aggregato delle decine risultassero centinaia, o dall'aggregato delle centinaia risultassero migliaia ec.

Voi dunque potete ridurre le regole dell'addizione alle seguenti:

1. *Ordinare i numeri coll' ordine locale.*

2. *Addizionare colonna per colonna i componenti simili delle serie, e notarne sotto le stesse i rispettivi aggregati.*

3. *Notare, in caso di eccesso sulle decine, solo l'avvanzo delle stesse, e se questo eccesso non vi fosse, apporvi semplicemente* 0.

4. *Riportare le decine ritrovate all' aggregato della colonna seguente.*

*Esempio* 1. — *Sieno da sommarsi le serie seguenti:*

```
452003
  5823
 78917
 50205
 98520
 19002
------
704470
```

*Soluzione.*

1. Riunisco le *unità* 3,3,7,5,2, della prima colonna verticale a destra, che trovo uguali a 20: scrivo 0 sotto la colonna delle unità, e 2 decine riporto alla colonna seguente.

2. Riunisco le *decine* 2, 1, 2 della seconda colonna verticale, che trovo uguali a 5 decine, le quali riunite a 2, riportate dalla colonna antecedente, danno la collezione di 7 decine: scriverò 7 sotto la loro colonna, cioè sotto la seconda.

3. Riunisco le *centinaia* della terza colonna verticale 8,9,2,5, che trovo uguali a 24 centinaia, ossia a 2 migliaia, e 4 centinaia: io scriverò 4 sotto la colonna delle centinaia, e riporterò le due migliaia alla colonna seguente.

4. Riunisco le *migliaia* 2, 5, 8, 8, 9, che trovo uguali a 32

migliaia, che aggiunte a 2 altre, ricavate già dalla colonna antecedente, ammontano a 34, e scriverò 4 sotto la linea, e 3 riporterò alla colonna seguente.

5. Riunisco le *decine di migliaia* 5, 7, 5, 9, 1, che ritrovo ugua li a 27 decine di migliaia, le quali aggiunte alle 3 dell'antecedente colonna, danno il numero di 30 decine di migliaia. Scriverò 0 sotto la colonna già sommata, e riporterò le 3 centinaia di migliaia alla colonna seguente.

6. Restano 4 *centinaia di migliaia* le quali, unite a 3 della colonna antecedente formano 7 centinaia di migliaia; scriverò intieramente il 7 sotto la linea, e dirò, che l'*aggregato massimo* delle serie proposte è 704470.

| *Esempio* 2. — | 3570167 | *Esempio* 3. — | 20036667859 |
|---|---|---|---|
| | 011033 | | 41234331 |
| | 465884 | | 1564110101 |
| | 17700 | | 1035063456 |
| | 4321386 | | ——— |
| | ——— | | 22677075747 |
| | 8386170 | | |

## § 2.

*Dati due numeri disuguali, sottrarre il minore dal maggiore.*

*Sottrarre* suona lo stesso che *levare*, *togliere*, *scemare*. Vi deve essere dunque nella richiesta operazione un numero da cui si toglie, ed un numero che si toglie dal detto. Una sì lieve considerazione ci fa scorgere ancora che il primo dev'essere maggiore del secondo; poichè niuno di buona mente si è avvisato togliere un numero maggiore da un numero minore: nè un numero che si toglie da se stesso dicesi *sottrarre*, ma *estinguere la quantità*, così 20 meno 20, *diventa nulla*, e 135-135=0. È ragionevole pure che le grandezze, che vogliono sottrarsi tra loro, debbono essere della medesima specie, ossia riducibili alla medesima misura elementare: così si possono sottrarre grana da ducati, palmi da canne, ore da secoli, perchè le grana ed i ducati sono riducibili alla medesima unità o misura elementare *cavallo*: i palmi e le canne alla medesima unità *oncia*: le ore ed i secoli alla medesima unità elementare *minuto*; ma niuno si avvisi scemare le monete dal tempo, lo spazio dalla velocità e simili. In breve « *le quantità, che vogliono scemarsi tra loro, debbono essere commensurabili pel medesimo elemento* ».

Or quale sarà la regola, che ci condurrà ad una facile sottrazione? Giovanetti, potrete di leggieri osservare, che la sottrazione è un calcolo direttamente contrario all'operazione, che voi denominaste *somma*. In quella in effetti si aggiunge, ed in questa non si fa altro, che scemare, ed ognun di voi è persuaso, che lo scemare e l'aggiungere sono due operazioni della mente, tra loro contrarie ed opposte. La regola dunque della sottrazione dev'essere una verità totalmente contraria a quella della somma; e siccome in quella si è proposto il principio « *riunite le parti de' tutti minori, restano i tutti minori riuniti in un tutto maggiore:* in questo al contrario dovrà stabilirsi » *scemate le parti, restano scemati anche i tutti.* Coordinate dunque le serie colla corrispondenza locale; scemate le unità dalle unità, le decine dalle decine, cioè le parti dalle parti, ed avrete scemato il tutto dal tutto.

Quattro casi intanto nell' esecuzione di tal facilissimo calcolo possono a voi, o giovanetti, offerirsi.

1. O ciascuna cifra componente il numero minore è di valore più piccolo di quello di ciascuna cifra componente il numero maggiore.

2. O alcune cifre componenti il numero minore sono in valore più grandi di quello delle cifre componenti il numero maggiore.

3. O le cifre componenti a destra il numero superiore costano di zeri.

*CASO PRIMO.*

Se le cifre della serie minore sono in valore più piccolo delle cifre del numero superiore, scemate unità da unità, decine da decine, centinaia da centinaia ec. e l'operazione sarà eseguita.

*Esempio 1. — Da 48 voglio togliere 26.* Scriverò 26 sotto 48 coll' ordine locale, e tirerò sotto di essi una linea;

| | |
|---|---|
| *Sottraendo* | 48 |
| *Sottrattore* | 26 |
| | — |
| *Residuo* | 22 |

Indi dirò da 8 unità del numero maggiore toltene 6 del numero minore, restano 2; noterò il 2 sotto la colonna delle unità: da 4 decine del numero maggiore toltene 2 del numero minore restano 2: noterò il 2 sotto le decine. Chiamerò 22 *residuo, eccesso, avvanzo, differenza*, e dirò: *da 48 toltone 26, l'avvanzo, il residuo, la differenza, l'eccesso* è 22.

*Esempio 2.* — *Sia da sottrarsi* 23451 *da* 87564. Si scrivano coll'ordine locale, il minore sotto il maggiore, e facendo le rispettive diminuzioni, colonna per colonna, si avrà

*Sottraendo* 87564
*Sottrattore* 23451

*Residuo* 64113

*Avvertimento.*

Volendosi istituire un più preciso linguaggio, dicasi *resto*, quando colla sottrazione si vuol conoscere ciocchè rimane da un dato numero, da cui sia tolto un'altro più piccolo. Tizio possedeva in tasca ducati 7, ha speso nel mercato ducati 4, gli restano ducati 3. Si chiama *eccesso* quando paragonando fra loro i numeri, si vuol conoscere per mezzo della sottrazione di quanto uno sia maggiore dell'altro; se un uomo è alto 6 palmi, e l'altro 5, si dirà, che il primo *eccede* il secondo di 1 palmo. Finalmente si chiama *differenza* allorchè nel paragonare i due numeri si pone mente non alla quantità de' detti, ma alla sola ineguaglianza de' medesimi. Così nell'esempio addotto non si cerca sapere quale de' due uomini era più alto, ma solo la disparità di altezza, e si dirà che la loro *differenza* è 1 palmo. Sicchè *resto* è relativo a ciò che rimane: *eccesso* è relativo al numero maggiore: *differenza* alla disparità solo de' numeri, non alla loro quantità.

*CASO SECONDO.*

La regola indicata nel caso 1. non sembra che avesse luogo, allorchè alcune cifre del numero minore sieno maggiori delle cifre corrispondenti del numero maggiore. Se da 317 volessi togliere 292 e scrivessi

*Sottraendo* 317
*Sottrattore* 282

io potrei bene da 7 unità della colonna superiore togliere 2 unità della inferiore, ma non potrei in simil modo da 1 decina della colonna superiore togliere 8 della inferiore. Come infatti da 1 togliere 8? Ad ovviare un tale inconveniente, è d' uopo ricorrere alla riflessione che siegue.

Un tutto può subire varie decomposizioni, ma sarà sempre

lo stesso; apparirà in diversa forma, ma la sua quantità sarà in niente alterata. Così il numero 317 invece di decomporsi in 3 *centinaia*, 1 *decina*, e 7 *unità*, si può decomporre in 2 *centinaia*, 11 *decine*, e 7 *unità*. Quel numero intanto, che non potea essere sottratto da una decina, potrà benissimo sottrarsi da 11 decine.

Trasformisi adunque il tutto maggiore in un'altro a se uguale, talmente che si accrescano almeno di una decina le cifre minori, e la sottrazione avrà il suo corso. Nell' addotto esempio

$$\begin{array}{r} 317 \\ 282 \\ \hline =35 \end{array}$$

7 *unità* meno 2 *unità* = a 5 *unità*: 11 decine *meno* 8 decine = a 3 decine: 2 centinaia *meno* 2 centinaia = a 0. Sicchè il residuo sarà 3 *decine*, e 5 *unità*; ossia 35.

*CASO TERZO.*

Valga la stessa ragione se da un numero maggiore, composto da più zeri, si volesse sottrarre un numero minore composto di cifre significative, come se da 1000 volesse togliersi il numero 386, scrivendo

$$\begin{array}{r} 1000 \\ 386 \end{array}$$

Non potendosi in tal caso sottrarre da zero alcuna delle dette cifre, si concepirà il detto numero composto di zeri trasformato in un' altro, in cui le migliaia si ridurranno a 9 centinaia ed 1 centinaio, il centinaio a 9 decine ed 1 decina, la decina a 10 unità. Così il numero 1000 sarà risoluto in 9 *centinaia*, 9 *decine*, e 10 *unità*; e quel numero di cifre significative, che non si poteva sottrarre dagli zeri, si potrà sottrarre agevolmente da 9 centinaia, 9 decine, e 10 unità in questo modo

$$\begin{array}{r} 1000 \\ 386 \\ \hline 614 \end{array}$$

Come se avessi detto

10—6=4
9—8=1
9—3=6

*Esempio* 3. — 8000000000
725289103

7274710897

Il numero superiore si considererà come trasformato in 799999999 e 10 unità, e così renderassi agevole la sottrazione. Può quindi trarsi come pratica regola « *considerate l' ultimo zero a destra come 10, e tutti gli altri precedenti verso sinistra diminuiti di una unità*, ossia 9.

Che se gli zeri non siano immediatamente dopo la prima cifra significativa a sinistra, allora la trasformazione comincerà da dove terminano le cifre significative, come nel seguente esempio:

48500003
678209

47821794

In cui il numero maggiore s' intenderà trasformato in 47 milioni, 14 centinaia di migliaia, 9 decine di migliaia, 9 migliaia, 9 centinaia, 9 decine, e 13 unità, come se avessi detto

unità————————13—9=4
decine———————9—0=9
centinaia————–—9—2=7
migliaia————–—9—8=1
decine di migliaia — 9—7=2
centinaia di migliaia 14—6=8

47 milioni, non avendo sottrattore, si noterà tale quale 47: e tutto l' avanzo sarà 47821794.

Dalle cose dette si rilevano le seguenti regole per la sottrazione:

1. *Scrivere il numero minore sotto il maggiore coll' ordine locale.*

2. *Sottrarre unità da unità, e centinaia da centinaia ec. e notare sotto le rispettive colonne i ritrovati avvanzi.*

3. *Trovandosi la cifra del numero inferiore superare la cifra del numero maggiore, considerare il sottraendo come decomposto in ordine di un grado inferiore, ed avvalorare la cifra minore di una decina, centinaio, migliaio, ec. tolto dalla cifra contigua significativa a sinistra, che perciò resterà diminuita di una unità.*

*Avvertimento.*

Se il numero terminato di *zeri*, cominciasse da unità, ed il numero minore fosse di poche cifre, il residuo a sinistra terminerà di molti 9. Così

| *Esempio* 2. — 100000 | *Esempio* 3. —1000000000 |
|---:|---:|
| 88 | 87000 |
| 99912 | 999913000 |

§ 3.

*Dati due numeri disuguali, sottrarli fra loro per mezzo de' complementi aritmetici.*

Giovanetti, a più esercitare l'acume del vostro intelletto, io voglio impararvi come si può sottrarre un numero da un altro per mezzo de' *complementi aritmetici*. Bisogna partire prima dalle definizione del *Complemento Aritmetico*.

*Sia il numero 1000, da cui si voglia sottrarre 827.* Costando il 1000 di zeri, l'operazione sarà facilissima col considerare il primo zero a destra come 10, e tutti gli altri come 9, e sottrarre 827 da 99 e 10 (*avvertimento precedente*). Il residuo sarà 173. Questo 173 si dice *complemento aritmetico* di 827 al 1000, perchè 173 appunto ci voleva per completare il numero 1000, quando si aveva già l'827. Così 4396 è *complemento aritmetico* di 5604. Eseguendosi infatti la sottrazione

$$\begin{array}{r} 10000 \\ 5604 \\ \hline 4396 \end{array}$$

il numero appunto 4396 ci voleva a completare il 10000, quando si aveva il noto 5604. Così 73 è complemento aritmetico di

27, 6 lo è di 4. ec. Sicchè « *Complemento aritmetico di un numero noto si dice l'altra parte ignota, ch'è necessaria a completare il 10 o il 100 o il 1000 o il 10000* ec. *secondochè di una o due o tre o quattro cifre* ec. *è composta la parte nota* ».

È utile cosa intanto, che i giovanetti imparino a trovare il complemento di qualunque numero col supporre gli zeri sul numero minore ed operare mentalmente la sottrazione, semplicemente notando i residui. Così volendo trovare il complemento di 822 a 1000 dovrei scrivere così

$$\begin{array}{r} 1000 \\ 822 \\ \hline 178 \end{array}$$

e poi operare 10—2=8; 9—2=7; 9—8=1, e dire il *complemento* è 172. Più giovevole sarà se non si scriva il 1000, e mentalmente si faccia sortire il 178, supponendo gli zeri sul numero 822.

Così il complemento di 827 a 10000=9173; il complemento di 10000000 a 3978=9996022.

Ricordatevi nel proposito, che dovendosi trovare il complemento tra un numero di poche cifre, ed un' altro di molti zeri, le cifre dippiù a sinistra porteranno sempre 9 ( *Avv. prec.* ).

Ciò premesso, due sono i metodi, con cui potrà la operazione eseguirsi, se vuol farsi la sottrazione per mezzo de' complementi aritmetici, 1. *metodo di decomposizione*, 2. *metodo di sopraddizione*.

### *Metodo di decomposizione*

*Sia il numero 6234, da cui si vuol sottrarre il numero 528.* Il numero 6234 è decomponibile in 1000+5234; ( e qui si avverta, che un numero così abbassato si dice *caduto di un grado*, ovvero *degradato di un' ordine*; così 89100 si dice *diminuito di un grado* nel diventare 79100 ). Sottraggo 528 da 1000, e ne ritrovo per residuo, col metodo dell' avvertimento precedente, il *complemento aritmetico* 472. Ma questo è un falso residuo, mentre io doveva sottrarre 528 non da 1000, ma da 1000+5234; converrà perciò aggiungere 5234 al falso residuo 472. Il vero residuo quindi deve essere 472+5234, ossia 5706.

Che però si sciolga 6234, numero maggiore, in 1000+5234:

sotto 5234 si apponga il *complemento aritmetico* 472; e la loro somma esprimerà il vero residuo de'due numeri 6234 e 528. L'operazione si scriva come siegue

| | |
|---|---|
| *Num. decomposto* 10000 + | 5234 |
| *Complemento* | 472 |
| Residuo | 5706 |

Onde regola si è

1. *Si decomponga il numero maggiore in 10, 100, 1000 cc. e nel resto decaduto di un grado.*

2. *Si trovi il complemento aritmetico del sottrattore dato.*

3. *Si aggiunga il complemento aritmetico alla parte seconda del decomposto.*

4. *La somma sarà il residuo.*

*Esempio 2. — Sia dal numero* 79356 *da sottrarsi il numero* 5789.

Si sciolga il numero maggiore in 10000 + 69356.

Si trovi il complemento del sottrattore 5789 a 10000; ed il ritrovato complemento 4211 si aggiunga alla parte minore, degradata, ossia a 69356. Ecco il vero residuo.

| | |
|---|---|
| | 10000+69356 |
| *Complemento aritmetico* | 4211 |
| *Vero residuo* | 73567 |

*Esempio 3. — Sieno da sottrarsi i due numeri* 8678935 e 855. Il primo equivale a 1000000+7678935. Il complemento aritmetico del minore 855 a 1000000 è 999145. Si aggiunga questo alla seconda parte del decomposto ossia a 7678935 e si avrà il vero residuo 8678080, colla giacitura che siegue

| |
|---|
| 1000000+7678935 |
| 999145 |
| 8678080 |

*Metodo di sopraddizione.*

*Esempio* 1. — *Sia, come nel caso precedente, da sottrarsi 528 da 6234.*

Se al numero maggiore 6234 io avessi aggiunto 1000, io avrei avuto 7234, ossia lo avrei *elevato di un grado.* Facendo l'operazione, come nel metodo antecedente, il falso numero maggiore 7234 sarebbe decomponibile in 1000+6234, ed il residuo non sarebbe più, *complemento* 472+5234, ma *complemento* 472+6234. Or questo sarebbe falso residuo, perchè eccedente di 1000; dunque riducendosi, il residuo sarebbe 472+6234—1000, ossia 472+5234, ossia come nel caso primo 5806.

Ed elevando la regola

1. *Si sommi il complemento aritmetico del sottrattore col sottraendo.*

2. *Si rettifichi l'errore col far cadere di un grado il residuo falso.*

*Esempio* 2. — *Sia* 87 *da sottrarsi da* 5292. Si trovi il complemento aritmetico di 87 a 100 ossia 13, numero abbisognevole a compire il numero 100. Si sommino 5292 e 13, scrivendo ed operando così

| | |
|---|---|
| | 5292 |
| | 13 |
| *Residuo falso* | 5305 |
| *Residuo rettificato* | 5205 *collo scemarsi di un grado* |

*Esempio* 3.—*Sia il numero* 789504 *da sottrarsi da* 800079567. Si trovi il complemento del numero 789504, che si avrà sottraendo 789504 da 1000000, e sarà 210496. Si sommi tal complemento col sottraendo 800079567, e si cali l'aggregato di un grado.

| | |
|---|---|
| *Numero maggiore* | 800079567 |
| *Complemento aritmetico* | 210496 |
| *Somma* | 800290063 |
| *Si tolga* | 1000000 |
| *Residuo rettificato* | 799290063 |

## § 4.

*Da più serie di numeri sottrarre altrettante serie di altri numeri per mezzo de' complementi aritmetici.*

Siano le serie 1237, 271, 29 da sottrarsi dalle serie maggiori 6528, 784, 59; le prime espresse da A, B, C; e le seconde da D, E, F.

| | |
|---|---|
| 6528——A | 1237——D |
| 784——B | 271——E |
| 59——C | 29——F |

Noi possiamo avere il residuo delle tre somme D, E, F sottratto dalle tre serie A, B, C in tre modi.

1. Si possono sommare le serie A, B, C; sommare dipoi le serie D, E, F; e dal primo aggregato sottrarre il secondo; ciò sarebbe il modo ordinario, come siegue. Poichè 6528+784+59=7371; e 1237 +271+29=1537: si sottragga 1537 da 7371, e si avrà il residuo 5834.

2. Si potrebbero notare le differenze di ciascuna serie *sottraenda* dalla serie *sottrattrice*, e poi sommarle. Così trovare la differenza tra A e D, ossia tra 6528 e 1237=5291; poi la differenza tra B ed E ossia 784 e 271=513; e finalmente la differenza tra C ed F, ossia tra 59 e 29=30, e le tre differenze 5291, 513, e 30 riunirle in una somma=5834.

Potremmo queste differenze trovarle co' complementi aritmetici di D, E, F, con sottrarre cioè 1237 da 10000, 271 da 1000, e 29 da 100, ed averne i complementi 8763, 729, 71. Ciascuno di questi complementi sommato col sottraendo darebbe un residuo falso, poichè il primo avrebbe 10000 dippiù, il secondo ne avrebbe 1000, il terzo 100 (§. 3.). Sommando questi falsi residui, noi avremmo nel residuo totale tre dippiù 10000, 1000, 100. Si sottraggano questi tre dippiù dalle somme, e si avrà il numero vero, che noterà le differenze delle serie A, B, C e le serie D, E, F, come qui osservasi

## § 5.

*Eseguita la somma, verificare se siasi o no incorso in errore.*

Con due modi può verificarsi se l'aggregato di più serie sia giusto ed esatto, ovvero no;

1. Col metodo dell'addizione.

2. Col metodo della sottrazione, usitato da quasi tutti gli Aritmetici.

3. Col metodo proposto da M. La Croix.

*Metodo di verificare la somma coll'addizione.*

A comprendere la ragionevolezza, nonchè facilità di questo metodo, uopo è premettere una lievissima considerazione.

*Due quantità se sono veramente uguali, accresciute dell'istesso numero daranno somme uguali.* Così se $5+3$ sono uguali ad $8$; aggiungendo sì al $5+3$ che all'$8$ la quantità $4$, si avrà $5+3+4$ uguale ad $8+4$, ossia $12=12$.

Ciò premesso. Alle serie sommate si aggiunga una quantità numerica qualunque arbitraria, e si sommi colle stesse. La stessa quantità si sommi coll'aggregato ricevuto, e se i risultati sono uguali, si può avere sicurezza di non essersi incorso in errore. Così alle serie A, B, C si aggiunga la serie E, e si sommino le quattro A, B, C, E notandosene l'aggregato in F. Si noti l'istessa serie arbitraria E sotto la serie D aggregato delle tre A, B, C, e se la somma è uguale alla somma F, l'operazione si stimerà sicuramente esente da errore.

*Esempio 1.*-2814——F

*Serie aggiunta* 189——E

A——123<br>
B——524 (tre serie date)<br>
C——978

1625——D<br>
*Serie aggiunta* 189

2814

*Esempio 2.*-10157988——F

2222222——E

A——4567239<br>
B——2134520<br>
C——1234007

7935766——D<br>
*Serie aggiunta* 2222222

10157988

*Metodo di verificare la somma colla sottrazione.*

*Se da quantità uguali si tolgono quantità uguali, i residui dovranno essere necessariamente uguali.* Or le serie date a som-

mare e l'aggregato rinvenuto suppongansi due tutti uguali. Si tolga sì dalle serie date che dall'aggregato rinvenuto una quantità uguale, e per brevità si tolga la prima serie. I residui dovranno essere parimente uguali.

Sieno le quattro serie A, B, C, D.

| | |
|---|---|
| 234698—— | A |
| 654302—— | B |
| 121212—— | C |
| 001302—— | D |
| 1011514—— | E |
| 776816—— | F |
| 234698—— | G |

L'aggregato delle quattro serie A, B, C, D, ricavato secondo le regole precedenti, è risultato uguale ad E. Si tolga la serie A e si sommino le restanti B, C, D, notandosene l'aggregato F sotto E. Si ragioni ora, come siegue.

Dalle quattro serie A, B, C, D toltene le serie B, C, D, resta certamente la serie A. Il rappresentante delle quattro A, B, C, D si è trovato uguale all'aggregato E, e il rappresentante delle tre serie B, C, D, si è l'aggregato F. Sostituendo quindi diremo; dall'aggregato E tolto l'aggregato F deve restare la quantità G=A. Che se questa non restasse identica, allora segno evidentissimo sarebbe che E non è l'aggregato vero di A, B, C, D, o pure che dall'aggregato E non si è regolarmente sottratto l'aggregato F. In qualunque caso ragion consiglia che l'operazione si ripeta. La regola dunque generale si è:

1. *Da tutte le serie sommate si separi la prima con una linea.*

2. *Si sommino le rimanenti, eccetto la prima, e questo secondo aggregato si scriva colla corrispondenza locale sotto il primo aggregato.*

3. *Si sottragga il secondo aggregato dal primo, e se l'avvanzo uguagli la prima serie tolta, segno è che l'operazione è stata regolarmente condotta.*

*Metodo proposto da M. La Croix.*

*Se da un tutto si tolgono tutte e singole le parti, egli è impos–*

*sibile sperarne un residuo; il risultato della operazione sarà uguale a* 0. Premesso un tal principio sieno le serie già sommate

```
        5283
         400
          62
        7823
       ——————
Sia l'aggregato — 13568—— A
        1110
```

Sommando separatamente le diverse colonne, troveremo le migliaia essere 12, le centinaia 14, le decine 16, e le unità 8. Tutti questi piccoli aggregati sono certamente contenuti nel solo aggregato A. Togliamo i detti aggregati, ed il risultato sarà 0. Dalle 13 *migliaia* dunque dell'aggregato A (a sinistra e con operazione rovescia alla precedente) tolte le 12 della prima colonna, l'avvanzo sarà 1, e si noti sotto il 3 dell'aggregato A. Quest'1 *migliaio* è uguale a 10 centinaia, che unite alle 5 dell'aggregato A, darà 15 centinaia; da queste toltene 14 della seconda colonna 2+4+8, si avrà per residuo 1, che si noti sotto il 5 dell'aggregato A. Quest'1 *centinaio* si sciolga in 10 decine, che unite alle 6 dell'aggregato A, darà 16 decine; da queste tolte le 16 decine della seconda colonna, ossia 8+6+2, il residuo sarà 0. Finalmente dalle 8 decine dell'aggregato A toltene 8 della prima colonna, il risultato sarà 0; segno che l'aggregato è un'aggregato vero. Che se fosse falso, dovrebb'essere o maggiore o minore dell'insieme de' quattro aggregati parziali, ciocchè non si è verificato nel caso presente.

## § 6.

*Eseguita la sottrazione, verificare se siasi o no incorso in errore.*

Lo scopo della sottrazione è di ritrovare di quanto un numero maggiore superi il minore; un tal numero si è detto *avvanzo* o *residuo*. Il numero minore dunque di tanto è minore del maggiore, di quanto lo dice il residuo: talmente che se al minore si aggiunge il residuo, nell'aggregato non può non risultarne, se non una quantità uguale alla maggiore.

Fatta dunque la sottrazione, addizionate il residuo al minore, e l'operazione dovrà credersi esatta, se l'aggregato risulterà identico colla serie maggiore; altrimenti il residuo sarà falso, e l'operazione dovrà rifarsi da capo.

| *Esempio* — A——86938532 | *Esempio* 2. 80259070 A |
|---|---|
| B——24815321 | 597237 B |
| C——62123211 | 89661833 C |
| D——86938532 | 80259070 D |

In ambedue gli esempi, dal maggiore A si è sottratto il minore B, e se n'è ottenuto il residuo C. Ora addizionando il minore B col residuo C, si è ottenuto novellamente il numero D, uguale al maggiore A.

## § 7.

### *Idea della moltiplicazione.*

Giovanetti, osservaste nell' addizione più serie di numeri potersi riunire in una sola, e questa essere esattamente uguale all' insieme delle serie date. Noi la riunione delle serie la distinguemmo col nome di *aggregato*. Osservaste dippiù, che le serie date possono essere le une dalle altre differenti; così delle tre

456
234
590

sono le une diverse dalle altre.

Ma potrebbero essere anche le istesse, e potrebbe darsi una seguela di più serie identiche; così se alcuno vorrebbe sommare 5 volte con se stessa la serie 4522, egli dovrebbe scrivere

4522
4522
4522
4522
4522

Quivi osserverebbe pure, che ogni parte viene ad essere 5 volte aggregata, cioè 5 volte le 2 unità, 5 volte le 2 decine, 5 volte le 5 centinaia, 5 volte le 4 migliaia. Una tale osservazione ci somministra un metodo abbreviativo, un metodo col quale potremmo compendiare questa noiosa ripetizione di serie. Essa sarebbe in effetti malagevole, se si volesse oltremodo prolungare; imperciocchè come ripetere la stessa serie 4522 un centinaio di

volte, un migliaio? Sarebbe un calcolo lungo, tedioso, e facilissimo ad imbeversi di errori. Egli è dunque espediente escogitare un metodo, che abbreviasse l'operazione, e vi rendesse più facile e più sicuro il risultato.

L'ispezione delle serie sopra indicate ci fa di leggieri osservare, che prendendo 5 volte le parti, ossia le *unità*, le *decine*, le *centinaia* ec. e notando l'insieme di ciascheduna cinque volte ripetuta, noi verremmo a prendere 5 volte il tutto, ossia troveremmo un numero, che conterrebbe 5 volte la serie indicata. Sotto dunque la serie 4522 io scrivo semplicemente il 5, ed indi ciascuna parte del tutto la prenderò 5 volte. Potrà dubitarsi di aver io un prodotto quintuplo del primo, ossia, *un tutto che contiene 5 volte il primo?*

Di quì si osserva che questa operazione non differisce dall'addizione, se non nel modo di eseguirla: il risultato è lo stesso, ma si ottiene per più breve cammino. Conviene però darle altra denominazione. Voi la chiamerete *moltiplicazione*, e domandati che cosa è moltiplicazione? risponderete:

1. *Ella è una somma abbreviata.*

2. *Ella è un operazione in cui, dati due numeri e prendendo le parti dell'uno tante volte quante ne indica l'altro, se ne ottiene un terzo numero, che contiene tante volte l'uno, quante volte lo esprime l'altro.*

Per brevità, e per adattarsi al comune linguaggio degli Aritmetici, chiamerete i due numeri *fattori*, ed il risultato della loro moltiplicazione lo chiamerete *prodotto*. Così de'due numeri 7 e 5 da moltiplicarsi fra loro, 7 e 5 dicansi *fattori*, e 35, che contiene il 5 ripetuto sette volte, dicasi *prodotto*. Similmente dati a moltiplicarsi i numeri 789 e 5, questi dicansi *fattori*, ed il numero 3945 di casi *prodotto*.

Tali operazioni poggiano sul principio « *Chi prende le parti un dato numero di volte, viene a prendere il tutto anche lo stesso dato numero di volte.*

Ecco l'idea della moltiplica. Solo aggiungo le diverse maniere, con cui si enuncia la moltiplicazione di un numero per un altro. Io posso dire:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | *preso* | 5 | *volte* | = 15 |
| 3 | *per* | 5 | | = 15 |
| 3 | *via* | 5 | | = 15 |
| 3 | *di* | 5 | | = 15 |

Diversi enunciati, ma la medesima idea. Si avverta però che sicco-

me il 3 ed il 5 concorrono a *fare* ossia formare il 15, per ciò si è che i numeri che si moltiplicano fra loro, diconsi *fattori*.

Altri hanno detto così: il numero, che si ripete, dicasi *moltiplicando*: il numero, che dinota quante volte deve ripetersi, dicasi *moltiplicatore*: il numero, che ne nasce, dicasi *prodotto*.

Usano dippiù gli aritmetici del segno $\times$ fra due numeri per dinotare che detti numeri debbono moltiplicarsi fra loro. Così $4\times3=12$ vuol dire, che 4 *moltiplicato per 3 dà un prodotto eguale a 12*.

## § 8.

### *Teoremi ancillari o preparatorj alla moltiplicazione de' numeri.*

Giovanetti, voi osservaste nel § 1. di questo titolo esservi alcune verità sì facili a comprendersi, che non hanno bisogno di alcuna dimostrazione: voi li diceste *assiomi*. Ma ve ne sono altre, che non si comprendono a prima vista sì facilmente; esse hanno bisogno di qualche sviluppo, di qualche ragionamento, di *dimostrazione* apposita e regolare. I matematici le dicono *teoremi*, ossia *proposizioni, che non possono comprendersi senza dimostrazione e disteso ragionamento.* I primi facilissimi su'quali vi converrà ripiegare la vostra attenzione, sono i seguenti.

*Teorema 1.*

*Dati due fattori, si avrà sempre l'istesso prodotto, sia che il primo si moltiplichi pel secondo, sia che il secondo pel primo.*

*Siano* 4 *e* 5 *i due fattori; io dico che* $4\times5=5\times4$. Risolvasi il 4 negli elementi $1+1+1+1$. Dovendosi questa frase ripetere 5 volte, si avrà la seguente disposizione di unità

$$
\begin{array}{l}
A-1+1+1+1-B\\
\quad\;\; 1+1+1+1\\
\quad\;\; 1+1+1+1\\
\quad\;\; 1+1+1+1\\
C-1+1+1+1
\end{array}
$$

Ove si vede che si avranno sempre le stesse unità, siachè le 4 serie orizzontali, da A a B, composte di 4 apici, si ripetano 5 volte; siacchè la serie verticale AC si ripeta 4 volte. Ma l'orizzontale AB esprime $4\times5$, e la verticale AC esprime $5\times4$, dunque $4\times5=5\times4$.

*Sieno similmente tre numeri* 4, 5, 6. Poichè $4\times5=5\times4$; si avrà l'istesso prodotto siachè si moltiplicasse 6 pel prodotto di $5\times4$

siachè si moltiplicasse 6 pel prodotto di $4\times5$; cioè $6\times4\times5=6\times5\times4$. Così se 6 invece di occupare il primo luogo, occupasse il secondo, si avrebbe $5\times6\times4=5\times4\times6$, e se occupasse il terzo e fosse scritto 4 5 6 si avrebbe: $4\times5\times6=4\times6\times5$. Ecco dunque sei posizioni che ciascun numero prende, e per conseguenza sei prodotti A, B, C, D, E, F.

$$
\begin{aligned}
A \text{——} 6\times4\times5 &= 6\times5\times4 \text{——} D \\
B \text{——} 5\times6\times4 &= 5\times4\times6 \text{——} E \\
C \text{——} 4\times5\times6 &= 4\times6\times5 \text{——} F
\end{aligned}
$$

Ma i tre prodotti D,E,F sono uguali fra loro, perchè $5\times4$ ossia 20 è comune alle due prime D, E, che equivalgono a $6\times20$, e $20\times6$, ed il $4\times6=24$ è comune alle due E, F che equivalgono a $5\times24$, e $24\times5$; e poichè ciascun di questi tre D,E,F è uguale alle corrispondenti A, B, C; dunque tutti i sei prodotti sono uguali fra loro. Perlocchè sia qualunque la posizione, che i fattori prendono fra loro, saranno sempre uguali i prodotti. Si ragioni così: se i fattori fossero o quattro o cinque o sei di numero ec. Così

$$
\begin{aligned}
45\times7\times8\times17 &= 17\times8\times7\times45 \\
8\times7\times17\times45 &= 45\times17\times8\times7 \\
7\times17\times8\times45 &= 8\times45\times7\times17
\end{aligned}
$$

*Teorema 2.*

*Moltiplicando le parti d' una serie per un dato numero, sarà moltiplicata o ripetuta tutta la serie per lo stesso dato numero di volte.* Sia da moltiplicarsi 423 per 4, sarebbe lo stesso che ripetere la serie 423 quattro volte e poi sommarle, come qui giace:

$$
\begin{array}{r}
423 \\
423 \\
423 \\
423 \\
\hline
1692
\end{array}
$$

Ove si vede che le unità delle serie 423 sono prese 4 volte, le decine 4 volte, e 4 volte le 4 centinaia delle stesse serie. Or siccome nella somma l' aggregato 1692 contiene 4 volte la serie 423; così

l'istesso numero 1692, che nella moltiplica dicesi **prodotto**, rappresenta le serie 423 quattro volte ripetuta.

*Teorema 5.*

*Il prodotto deve considerarsi come un numero noto: uno de' fattori come una parte del tutto noto, e l'altro fattore indica quante volte la prima parte debba essere ripetuta.*

Così 35 è tutto noto, 7 è una parte nota, e l'altro fattore indica quante volte il 7 dovrà ripetersi, e questo sarà 5. Il 35 dunque si risolve in 5 parti uguali a 7, ed è uguale a 7+7+7+7+7. Se poi si vorrà risolubile in 7 parti uguali a 5, sarà uguale il detto 35 a 5+5+5+5+5+5+5.

## § 9

### *Moltiplicare un numero composto per un numero semplice.*

La moltiplicazione, da quel che si è detto, poggia sul già espresso principio « *Chi prende le parti di un tutto un dato numero di volte, viene a prendere il tutto anche lo stesso numero di volte.* Sia la serie 2312 da moltiplicarsi per 3. Io metto il fattore 3 sotto le unità delle serie moltiplicando, come qui giace:

$$\begin{array}{r} 2312 \\ 3 \\ \hline 6946 \end{array}$$

e dirò: 3 volte 2 uguale a 6 unità; 3 volte 1 decina è uguale a 3 decine: 3 volte 3 centinaia è uguale a 9 centinaia; 3 volte due migliaia è uguale a 6 migliaia. Dunque la serie moltiplicata per 3 è uguale a 6 *migliaia*, 9 *centinaia*, 3 *decine*, e 6 *unità*, ossia uguale al numero 6936.

L'operazione indicata però è facilissima, perchè vi ho proposto un numero di cifre minori di 5. È facile indovinare a chi sia uguale 3 volte 1, 2 volte 3 ec. Ma non lo è così se io proporrò numeri assai più grandi, come 7 volte 8, ovvero 9 volte 6 ec. La mente ha bisogno di qualche tempo per coglierne l'equivalente, o almeno ciò non presenta la facilità del primo. Io però vi propongo un mezzo di rapida ed ammirabile agevolazione. Egli si è ritenere vi-

vamente a memoria la così detta *tavola Pitagorica*, perchè comunemente attribuita a Pitagora. Essa è la seguente:

A C

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

B D

Quivi nella prima serie orizzontale sono registrati i numeri ad uno ad uno sino a 9, nella seconda a 2 a 2, nella terza a 3 a 3 ec. Or volete voi trovare a chi equivale 7 volte 8? Prendete di mira il 7 nella serie verticale AB, e l'8 nella serie orizzontale AC; osservate dove s'incontrano le serie, l'orizzontale cioè del 7, e la verticale dell' 8: nella casella di comune troverete 56 equivalente di 7 × 8: così degli altri numeri. Avvenendo dunque qualche moltiplicazione di numeri superiori a 5, voi non sarete arrestati nell'operazione, potendo così trovare facilmente i rispettivi prodotti.

Solo però qui è degno di osservazione, che i prodotti de'numeri maggiori di 5 sono sempre decine; che però evitate notare interamente ciascun prodotto sotto i numeri rispettivi; notate bensì l'avvanzo sulle decine, riserbandovi a riportar questi nella classe seguente: così moltiplicandosi 4783 per 6 si scriva:

$$\begin{array}{r} 4783 \\ 6 \\ \hline 28698 \end{array}$$

Quivi il 6×3 dà 18 ossia 1 decina ed 8 unità; che però si noti 8 sotto le unità, e si riserbi la decina per riportarla alla colonna seguente. Indi il 6×8 dà 48, che aggiunto alla decina riportata darà 49 decine. Queste sono risolubili in 4 centinaia e 9 decine; che però le 9 decine si scrivano nel secondo luogo, e le 4 centinaia si riportino pel terzo prodotto, e così continuando ad operare si otterrà il prodotto 28698.

Riunendo dunque i precetti.

1. *Notate il fattore semplice sotto il composto.*

2. *Moltiplicate le unità, le decine, le centinaia etc. del composto pel dato numero semplice.*

3. *Notate il prodotto delle unità sotto le unità, e quello delle decine sotto le decine ec;*

4. *Nel caso che i rispettivi prodotti contenessero delle decine, le riporterete al prodotto delle cifre seguenti. Voi avrete così un numero che conterrà tante volte il numero composto quante ne addita il semplice fattore.* Gli esempii chiariranno la teoria.

*Esempio 1. — Sia 424 da moltiplicarsi per 2.* Noterò il 2 sotto le unità:

$$\begin{array}{r} 424 \\ 2 \\ \hline 848 \end{array}$$

Indi dirò 2×4=8; si noti 8 sotto l'unità. Dipoi 2×2=4; si noti 4 sotto le decine. Finalmente 2×4=8 si noti 8 sotto le centinaie: 848 dinoterà il prodotto di 424×2.

*Esempio 2. — Sia il numero 478 da moltiplicarsi per* 3. Si scriveranno i due fattori l'uno sotto l'altro con l'ordine locale

$$\begin{array}{r} 478 \\ 3 \end{array}$$

Or qui si rifletta, come siegue. Se moltiplicar si volesse secondo l'ordine naturale, la disposizione sarebbe notare il 24 prodotto delle 8 unità per 3; poi il 21 prodotto delle 7 decine per 3; e finalmente 12 prodotto delle 4 centinaia per 3. Ma siccome chi moltiplica decine per unità avrà per prodotto decine, e chi moltiplica 7 decine per 3 unità avrà per prodotto 21 decine, ossia 2 centinaia ed 1 decina; e chi moltiplica 4 centinaia per 3 unità avrà per prodotto 1 migliaio e 2 centinaia, così le decine 21 si scrivano più in là delle unità, e le 12 centinaia più in là; da ultimo se ne farebbe la somma, come qui sotto si vede

478
3
———
24
21
12
———
1434

Volendo però abbreviare l'operazione, si moltiplichi 3 per 8, e siccome il prodotto 24 contiene 2 decine e 4 unità, così le 4 unità si scrivano sotto la colonna delle unità, e le 2 decine si riserbino per la colonna seguente. Si moltiplichino le 7 decine del fattore superiore per 3, e se ne avranno 21 decine, le quali aggiunte alle 2, riserbate dalla prima colonna, ammonteranno a 23 decine; e poichè 23 decine sono decomponibili in 2 centinaia, e 3 decine, così queste 2 ultime si notino sotto la colonna delle decine, e le due centinaia si riserbino, per aggregarle al risultato della colonna che siegue. Si moltiplichino infine le 4 centinaia del fattore superiore per 3 e si avrà il prodotto 12 centinaia. Aggiunto a tal prodotto le due centinaia, ricavate dalla colonna antecedente, si avranno 14 centinaia. E siccome questi sono decomponibili in 4 centinaia ed 1 migliaio, così si scrivano al terzo luogo le 4 centinaia, e l'1 migliaio uscirà un poco più in là, ed occuperà il quarto luogo, che gli conviene. Dal che si dedurrà che il prodotto di 478×3 è uguale 1434.

## § 10.

*Moltiplicare due numeri, in uno de' quali sieno frammisti gli zeri.*

*Sia* 403 *da moltiplicarsi per* 3.
Si scriva:

403
3
———
1209

Lo zero per sua natura nulla significa: voi lo diceste altre volte *cifra inesprimente*. Esso serve solo a dinotare la mancanza delle unità o decine o centinaia, che può trovarsi in un numero. Nel caso del numero 403 dinota, che il numero costa di 4 centinaia e di 3 unità, e che vi mancano le decine.

Ma se nulla significa per se stesso, è segnale però che la moltiplicazione si sospenda pel suo luogo, non essendoci cifra di valo-

re da ripetersi. Quando il calcolatore avrà eseguita la moltiplicazione di 3 per 3, ed avrà sottoscritto il 9, a dinotare che mancano le moltiplicazioni delle decine per 3, scriverà zero nel prodotto. Per tale riflesso 0×0 darà zero. Il 3×4 darà per prodotto parziale 12, ed il prodotto totale di 403 moltiplicato per 3 sarà uguale a 1209.

*Esempio 2.* — 800240
4

3200960

Scritti i due fattori, moltiplicherete *decine, centinaia, e centinaia di migliaia*; la mancanza poi delle moltiplicazioni di *unità*, *migliaia, e decine di migliaia* la noterete con apporre zero ne' luoghi primo, quarto, e quinto; ed il prodotto sarà 3200960.

*Avvertimento.*

Occorrendo che i prodotti offrano più di 9 unità, più di 9 decine, più di 9 centinaia etc. onde necessità ne sorga di riportare le decine, le centinaia, le migliaia al luogo ove dovrebbero, per mancanza di moltiplicazioni, piazzarsi gli zeri: si faccia pure, mentre allora i luoghi negativi diventano positivi, e la scritturazione non cessa d' esser regolare. Così moltiplicandosi

*Esempio 1.* — 70509
7

493572

Le 7 decine riportate dal 72 si sono poste al secondo luogo, dove sarebbe caduto lo zero, ed il 3 si è posto nel quarto luogo dove sarebbe caduto parimenti zero, se il prodotto di 7×5 non avesse dato 3 migliaia da riportarsi.

*Esempio 2.* — 893050208
5

4465251040

Anche qui 5×8 dava 40, cioè 4 decine: poi 5×0 dava 0, ma nel suo luogo si sono notate le 4 decine riportate. Così si è praticato nel rinvenirci co' zeri rimanenti.

## § 11.

*Moltiplicare numeri fattori, che sieno ambedue composti.*

*Sia da moltiplicarsi il numero* **3423** *per* **56.** È lo stesso che moltiplicarlo prima per 6 unità, poi per 5 decine, ossia per 50. Or se si sapesse a chi è uguale 3423 preso 6 volte, 3423 preso 50 volte, e si unissero questi prodotti, si saprebbe a chi è uguale 3423 preso 55 volte. Non dipertanto il difficile non è riposto nel ritrovare i prodotti parziali, ma nel debitamente l'un sotto l'altro collocarli, e ciò si otterrà col riflettere a quanto siegue:

3423
56

Avere il primo prodotto di 3423 per 6 unità, e collocarlo coll'ordine locale come giace, nasce dal problema antecedente. Moltiplicare poi 3423 per 5 decine, è lo stesso che prendere 50 volte le 3 unità, 50 volte le 2 decine, 50 volte le 4 centinaia, 50 volte le 3 migliaia del fattore superiore. Ma prendere 50 volte le unità, è lo stesso che avere in prodotto decine; prendere 50 volte le centinaia è lo stesso che avere in prodotto le migliaia ec. dunque il prodotto delle 5 decine per 3 non si deve scrivere sotto le unità, ma sotto le decine; il prodotto delle 5 decine per 2 si deve scrivere sotto le centinaia, ed il prodotto delle 5 decine per le 4 centinaia si deve scrivere sotto le migliaia, ossia scrivere tutto il prodotto secondo sotto il primo, ma cominciando dalla colonna delle decine; scrivere tutto il prodotto terzo sotto il secondo, ma cominciando dal terzo posto in ordine al primo; e portarsi così la loro scritturazione, prima di venire alla somma de' tre prodotti, espressa da A.

```
  3423
   456
 -----
 20538
17115
13692
-------
1560888
```

*Esempio 2. — Sia da moltiplicarsi* 5787 *per un fattore di* 3 *cifre, p. es.* per 649. Si ripeta il medesimo ragionamento. Moltiplicare 5787 per 549 è lo stesso che moltiplicare 5787 per 9 unità, poi per 40, finalmente per 500. I due primi prodotti di 5787 pe' due fattori 9 unità e 4 decine si trovano colla norma

dell' esempio antecedente. Occupiamoci a ritrovare quello di 5787 per 600 e si dica:

Moltiplicare 6 centinaia per 7 unità ossia 600 per 7 darà certamente migliaia e centinaia: moltiplicare 600 per 80, ossia per le 8 decine del secondo luogo, darà decine di migliaia e migliaia: moltiplicare finalmente centinaia per centinaia, ossia 600 per le 7 centinaia o 700, darà centinaia e decine di migliaia ec. dunque il prodotto di 6 per 7 del fattore superiore deve cominciare a scriversi sotto la colonna delle centinaia; il prodotto di 6 per 8 sotto le migliaia; il prodotto di 6 per 7 sotto le decine di migliaia; il prodotto finalmente di 6 per 5 sotto le centinaia di migliaia; e poi sommare tutti i tre parziali prodotti, come qui siegue:

```
   5787
    649
  -----
  52083
 23148
34722
-------
3755763
```

Così se il fattore inferiore costa di quattro, cinque, sei cifre ec. e ne dedurrete la regola seguente

1. *Si scrivano i due fattori coll' ordine locale.*

2. *Si trovino i rispettivi prodotti, ma il primo si scriva dall'unità in poi: il secondo dalle decina: il terzo dalle centinaia ec.: avanzando due o tre luoghi ec. secondochè saranno decine, centinaia ec.*

3. *Si sommino i prodotti parziali, e così si avrà un numero, che conterrà tante volte il fattore composto quante volte lo dice l' altro composto fattore.*

*Esempio 5. — Sia da moltiplicarsi il numero A per B.*

```
A     57802392
B          786
   -----------
C    346814352
D   462419136
E  404616744
   -----------
D  45432680112
```

Si moltiplichi il fattore A per 6, e si noti il prodotto C. Si moltiplichi lo stesso fattore A per le 8 decine, e si noti il prodotto D, ma col cominciare a scriverlo sotto le decine, avvanzando così

d'un posto la scrittura. Si moltiplichi da ultimo A per le 7 centinaia del fattore B, e si noti il prodotto E, ma col cominciare a scrivere sotto la serie delle centinaia. Si sommino i tre prodotti parziali C, D, E, e se ne avrà il prodotto D.

## § 12.

### *Idea della divisione.*

Nel § 2. di questo titolo si espose il caso, in cui conveniva da un numero maggiore togliere un numero minore: così *da* 422 *togliere* 67. Ci occupammo de' modi come giungere allo scopo, e ne assegnammo le rispettive ragioni. Ma avviene sovente che da uno stesso numero si deve più volte togliere la stessa quantità, così dal numero 82 conviene p. es. togliere 9 volte il 9. In tal caso 82 soffrendo la prima diminuzione diviene uguale a 73, il 73—9=64, il 64—9=53 ec. Talchè si avrebbe la seguente operazione: 82—9—9—9—9—9—9—9—9—9=1. Si conchiuderebbe da ciò che 82 contiene 9 volte il 9, ed 1 di più, e viceversa il 9 è contenuto 9 volte nell' 82, ma non lo misura esattamente perchè ritrova in esso 1 di più. Basterebbe quindi la ripetuta sottrazione del numero minore dal maggiore, e verificare quante volte la quantità maggiore contenga la minore, e viceversa quante volte la minore sia contenuta nella maggiore. Una tale operazione però facile ad eseguirsi in un numero minore, sarebbe tediosissima nella sproporzione di un numero maggiore e di un numeró minore. Se dal numero in effetto 4559 si volesse replicatamente sottrarre il 9, fin quando terminerebbe tale operazione?

Gli aritmetici si sono occupati perciò a compendiare una tale operazione, esaminando direttamente quante volte il minore sia contenuto nel maggiore.

E come ciò agevolmente ottenere? Ponete mente alle osservazioni che sieguono.

*Osservando quante volte il minore è contenuto nelle parti del maggiore, si può dedurre quante volte è contenuto nel tutto.* Se la quantità minore 2 è contenuta 40 volte nelle decine e 2 volte nelle unità del maggiore, si può argomentare che essa è contenuta 42 volte nel numero maggiore.

Il numero, che esprime quante volte il numero minore è contenuto nel maggiore, dicesi *quoziente*: il numero maggiore dicesi *dividendo*, ed il minore *divisore*.

Così dividete 40 per 8 ed osserverete che quest'ultimo è contennto 5 volte nel 40. Per voi 40 farà da *dividendo*: 8 da *divisore*: 5 da *quoziente*.

2. È di proposito intanto avvertire, che 40 contenendo 8 tante volte, quante ne dice 5, egli è formato dal ripetere 8 cinque volte; 8 e 5 dunque ripetendosi scambievolmente sono concorsi alla formazione di 40; il 40 dunque è un vero prodotto di 8 per 5, ossia è un prodotto del divisore pel quoziente. E partendo da questo ragionevolissimo principio, gli Aritmetici il problema della divisione lo riducono a questo « *dato un prodotto di due numeri, e dato uno de' fattori cogniti trovare l'altro fattore, che indicando il numero delle ripetizioni del primo, concorse alla formazione del numero prodotto.* »

Sotto questa considerazione il prodotto lo chiamiamo *dividendo*, l'un fattore noto *divisore*, il fattore ignoto e che si cerca *quoziente.*

3. Può consimilmente sotto una terza considerazione presentarsi la divisione aritmetica. Se il dividendo è composto di parti uguali al fattore noto, ma tante volte ripetute, quante volte lo dice il fattore ignoto, tutta l'operazione si riduce a decomporre il dividendo in parti uguali al fattore noto, e numerarle. Così dato il 35, e dato il fattore noto 7, il 35 è decomponibile in $7+7+7+7+7$.

Premessa tale idea, cosa è la divisione?

Possono apporsi tre giustissime definizioni.

1. *È un' operazione in cui date quantità disuguali, si cerca sapere quante volte la maggiore contiene la minore e viceversa quante volte la minore sia contenuta nella maggiore.*

2. *È un' operazione, in cui il prodotto o dividendo si decompone in parti uguali al fattore noto, di tanto numero quante ne esprime il fattore ignoto.*

3. *È un' operazione, in cui il prodotto, o dividendo si decompone in parti uguali al fattore noto, di tanto numero quante ne esprime il fattore ignoto.*

Cosa è il dividendo?

*È il prodotto del fattore noto per l'ignoto, ovvero del divisore pel quoziente.*

Cosa è il quoziente?

*È il numero che esprime in quanti o quali parti uguali è decomponibile il dividendo: è il fattore ignoto che, moltiplicato pel noto, rigenera il dividendo: è quello che dinota in quante parti uguali al divisore è decomponibile il dividendo.*

Tali maniere di definire il dividendo, il quoziente, ed il divisore, sono necessarie a conoscersi, facendone noi uso frequentissimo in prosieguo.

## § 13.

### *Teoremi ancillari alla divisione.*

#### *Teorema 1.*

*I multipli de' moltiplici sono sempre divisibili per l'aliquoto.*

Gli aritmetici dicono *aliquoto* un *numero-parte* che divide esattamente un *numero-tutto*; così 4 è aliquoto di 16, e 6 lo è di 18.

Or se 12 è divisibile per l'aliquoto 3, tutti i multipli di 12 come p. e. 24, 36, 48 ec. sono parimenti divisibili esattamente da 3. Cosa in fatti è 24, se non 12+12? e cosa è 36 se non 12+12+12? Or se 3 divide 12, dividerà ancora 12+12+12 etc.

#### *Teorema 2.*

*Se un numero divide due numeri, divide ancora la loro somma.*

Se 3 divide 6 e divide 12, dividerà certamente 18 somma di 6 e 12 per l'assioma « *dividendosi esattamente le parti, resta diviso esattamente il tutto.*

#### *Teorema 3.*

*Se un numero divide due numeri esattamente, divide esattamente anche la differenza di questi due numeri.*

Se 3 divide 6 e divide 18, dividerà 12 differenza di 6 e di 18. Imperciocchè 18 è uguale a 3+3+3+3+3+3, frase divisibile per 3, e 12 è uguale 3+3+3+3 frase parimenti divisibile per 3. Chi negherà, che 3+3, differenza delle due serie, sia pure divisibile per 3?

#### *Teorema 4.*

*Se un numero è divisibile per un altro; il doppio, il triplo ec. del dividendo è divisibile pel doppio, triplo ec. del divisore.*

Sia 20 divisibile per 4: il doppio di 20 sarà divisibile pel doppio di 4 ossia per 8. Imperciocchè 40=20+20, ed 8=4+4, dunque tanto è dividere 40 per 8, quanto dividere prima 20 per 4, e poi l'istesso 20 per 4.

## §. 14

### *Riflessioni sul dividendo.*

1. *Il dividendo è diviso esattamente da se stesso.* Così 13 è diviso da 13, 18 è diviso da 18.

2. *Non solo* 10, *ma anche tutti i complessi di decine sono divisibili per* 2 *e per* 5. Che il 10 sia divisibile per 2 e per 5, apparisce dall'essere $10=2+2+2+2+2$, e dall'essere $10=5+5$. Che sieno divisibili per 2 e 5 i complessi di più decine, si fa chiaro dallo sciogliere il complesso di più decine in tante decine particolari. Se ognuna separatamente presa è divisibile per 2 e per 5, sarà divisibile parimenti per 2 e per 5 tutto il complesso ( *teor.* 2. § 12). Laonde divisibili sono per 5 e per 2 i numeri 1460, 120, 7890 etc.

3. *Ogni dividendo la di cui ultima cifra sia*, 0, 2, 4, 6, 8, *ossia ogni numero pari, è divisibile per* 2. Sia il numero 18; questo è decomponibile in $10+8$. Se le due parti sono divisibili per 2, anche il tutto 18 è divisibile per 2 ( *teor.* 2. § 12 ). Sia il numero 436; questo è decomponibile in 43 decine e 6 unità. Ma se ogni decina è divisibile per 2; anche 43 decine saranno divisibili per 2. ( *teor.* 1. §. 12 ) Il 6 è divisibile per 2; dunque ambedue le parti, 43 decine e 6 unità, sono divisibili per 2. Ma quando le parti di un numero sono divisibili per 2, anche per l'istesso 2 sarà divisibile il tutto; dunque 436 è divisibile per 2.

4. *Il* 100 *è divisibile per* 4. Imperciocchè ogni numero terminato da zero è divisibile per 2, dunque 50 è divisibile per 2 ( *num.* 3 *antec.*). E se 50 è divisibile per 2, il doppio di 50 sarà divisibile pel doppio di 2 ( *teor.* 4. §. 12.) ossia 100 è divisibile per 4.

5. *Il* 1000 *è divisibile per* 8. Imperocchè 100 è divisibile per 4 *(num. antec.* ) E se 100 è divisibile per 4, 500 che è multiplo di 100, è anche divisibile per 4 (*Teor.* 1 ). Or se 500 è divisibile per 4, il doppio di 500 ossia 1000 è divisibile pel doppio di 4 ossia 8 ( *teor.* 4. § 12 ). Dunque 1000 è divisibile per 8.

6. *Il* 10, 000 *è divisibile per* 16. Imperocchè il 1000 è divisibile per 8, ( *num. antec.*) dunque il 5000 multiplo di 1000 è divisibile per 8. E se il 5000 è divisibile per 8, il doppio di 5000 è divisibile pel doppio di 8 ( *teor.* 4. §. 12. ) ossia 10,000 è divisibile per 16.

7. *Un numero è divisibile per* 4, *quando le due sue ultime cifre a destra formano un numero divisibile per* 4. Sia 116, di cui le due ultime cifre 16 sono divisibili per 4. Esso si decompone in $100+$ 16 unità. Il 100 è divisibile per 4 ( *num.* 4): per 4 parimenti sono divisibili le 16 unità, dunque è divisibile per 4 l'intiero 116.

8. *Ogni numero, le di cui tre ultime cifre sono divisibili per* 8, *è tuttoquanto divisibile per* 8. Sia il numero 8112, le cui tre ultime cifre 112 sono divisibili per 8. Desso è decomponibile in 8000 e 112 unità, ma l'8000 come multiplo di 1000 è divisibile per 8 (*num.* 5 + *teor.* 1) e le 112 unità per ipotesi sono divisibili per 8, dunque tutto il numero 8112 è divisibile per 8 (*Teor.* 2)

9. *Ogni numero, le di cui quattro ultime cifre sono divisibili per* 16, *è tuttoquanto divisibile per* 16. Sia il numero 91280, le cui quattro cifre 1280 sono divisibili per 16. Esso equivale a 90,000+1280. Ma 90,000 come multiplo di 10,000 è divisibile per 16 (*num.* 6+*teor.* 1) e 1280 per ipotesi sono divisibili per 16, dunque tutta la somma è divisibile per 16. (*Teor.* 2.)

10. *Tutti i numeri* 10, 100, 1000, 10000 ec. *sono multipli di* 9 *con* 1 *dippiù.*

Ed in vero se 3, 33, 333, 3333, etc. si moltiplichino per 3, si avranno 9, 99, 999, 9999 etc. Or se a tutti questi prodotti si aggiunga un'unità, si avrà 10, 100, 1000 etc. dunque il 10 è multiplo di 9, ma coll'aggiungere 1: e 100 è multiplo di 99 coll'aggiungere 1 etc.

11. *Ogni numero terminato col* 5 *è divisibile per* 5. Sia il numero 385. Esso è divisibile in 38 decine e 5 unità; ma queste ultime sono divisibili per 5, e le 38 decine sono divisibili parimenti per 5 (*num.* 2. §. 12) dunque tutto il numero 386 è divisibile per 5.

12. *Ogni numero, la somma delle di cui cifre sia uguale a* 9, *oppure sia multipla di* 9, *è divisibile per* 9. Ne' numeri sino ad 81, tutti i numeri, la somma delle cui cifre è uguale a 9, sono multipli di 9, così 18 le cui cifre 1+8=9, 27 le cui cifre 2+7=9; 81 le cui cifre 8+1=9 sono tutti multipli di 9, perchè contano per elemento di divisione 9. La difficoltà quindi non cade su questi numeri 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, ma piuttosto su'numeri assai complessi, come sul numero 8964, la somma delle di cui cifre 8+9+6+4=27 multiplo di 9.

Sia dunque il numero 8964. Esso è decomponibile 8000, 900, 60 e 4. Or si rifletta: ogni numero che termina in 0 come 10, 100, 1000 ec. diviso per 9 (*num.* 10.) da per residuo 1. Dunque se 1000 diviso per 9 dà per residuo 1; il numero 8000 che è ottuplo di 1000 darà per residuo 8. Così 900 dà per residuo 9, 60 dà per residuo 6, 4 è per se stesso residuo, perchè non è divisibile per 9. Sicchè tutte le parti del numero 8964 sarebbero divisibili per 9, se non ci fossero i residui 8, 9, 6, 4. Ma questi sono uguali a 27 divisibili per 9, e 27 sorge da' residui delle ni–

gliaia, centinaia, decine ed unità del numero 8964, e però sono parti di detto numero; dunque tutte le parti riunite, e perciò tutto il numero 8964, è divisibile per 9.

*Un numero, tutte le di cui cifre prese insieme, sono divisibili per* 3, *è tutto quanto divisibile per* 3. Sia il numero 98514, le di cui cifre 9+8+5+1+4(=27) sono divisibili per 3.

Se 3, 3, 33, 333 ec: si moltiplicassero per 3, ne sorgerebbero 9,99,999 ec: tutti multipli di 9. Se a ciascuna di queste ultime frasi si aggiungesse 1, sorgerebbero 10,100,1000 etc: Ogni 10 dunque, 100, 1000 etc: è divisibile per 3 e dà per residuo 1. Ma il numero 98514 è decomponibile in 90000+8000+500+10+5, de' quali 90000 avrebbe 9 volte 1 dippiù, 8000 ne avrebbe 8, 500 ne avrebbe 5, 10 ne avrebbe 1, e 4 resterebbero. Il numero quindi 98514 sarebbe divisibile per 3 se non ci fossero i dippiù 9, 8, 5, 4. Ma la somma di questi è pure divisibile per 3; dunque tutto il numero 98514 è divisibile per 3. Questa dimostrazione è identica colla precedente.

## § 15.

### *Riflessioni sul quoziente.*

1. *Se il divisore è l'unità, il quoziente sarà uguale al dividendo.* Così 140 diviso per 1 darà 140 al quoziente.

2. *Se il dividendo è zero, ed il divisore è numero, il quoziente sarà zero.* Imperciocchè essendo il dividendo uguale al divisore moltiplicato pel quoziente (§.11. *tit.* 2.) per avere un prodotto *zero*, bisogna moltiplicare il *divisore-numero* pel *quoziente-zero.* Ma ogni numero moltiplicato per zero darà sempre zero, dunque etc.

3. *Se il divisore è zero, ed il dividendo è numero, la divisione è impossibile ad eseguirsi.* Imperciocchè a riprodurre il dividendo qual quoziente apporremo? Se un numero, moltiplicando questo pel divisore zero, riprodurrà zero, e non il *dividendo-numero*: se apporremo zero al quoziente, moltiplicando zero al quoziente per zero al divisore, avremo parimenti zero. (§. 9. tit. 2.); Come dunque si potrà riprodurre il dividendo?

4. *Se in una divisione il dividendo si moltiplica per un numero, mentre il divisore resta l'istesso, il quoziente sarà moltiplicato per l'istesso numero.* Sia da dividersi 20 per 2; il quoziente sarà 10. Si moltiplichi il solo dividendo 20 per 4 ed il prodotto 80 si divida per 2, il quoziente sarà 40, ossia il 10 moltiplicato per 4. Infatti 80=20+20+20+20, dunque il quoziente sarà 10+10+10+10 ossia il 10 quadruplicato ossia 40.

5. *Se il divisore sarà moltiplicato per un numero, mentre il dividendo resta l' istessò, il quoziente reciprocamente diventerà tanto minore, per quanto sarà moltiplicato il divisore.* Imperciocchè il divisore fatto maggiore entrerà minor numero di volte nel dividendo, e perciò il quoziente dovrà di tanto minorare per quanto quello è divenuto più grande.

6. *Moltiplicandosi sì il divisore che il dividendo per lo stesso numero, il quoziente non sarà alterato.* Si moltiplichi sì il dividendo che il divisore per 3. Moltiplicandosi il dividendo per 3, il quoziente diveniva triplo ( *num. 4 antec.* ). Moltiplicandosi poi il divisore per l'istesso 3, il quoziente diviene suttriplo ( num. 5 *antec.*), ossia 3 volte minore: è ritornato adunque al valore primiero. Così si divida 24 per 3: il quoziente sarà 8. Quadruplicato sì il 24 che il 3, e dividendosi il prodotto 96 per 12, si avrà parimenti 8 al quoziente.

Dopo tali facilissime, ma utili prevenzioni, passiamo alla soluzione de' rispettivi problemi della divisione aritmetica.

## § 16.

*Dividere un numero seguito da zeri per un numero semplice.*

*Sia* 3000 *da dividersi per* 3. In tale operazione si va trovando un numero che ripetuto 3 volte dia 3000; questo numero non può essere, che 1000, mentre 1000 preso 3 volte da 3000. Similmente sia da dividersi 600 per 2. Si cerca un fattore, ossia un numero che ripetuto 2 volte dia 600; questo non può essere che 300, mentre un tal numero ripetuto due volte riproduce innegabilmente 600. Si dividano dunque soltanto le cifre significative pel numero divisore, ed al quoziente si aggiungano tanti zeri quanti ne sono nel dividendo. Così

*Esempio 1.* — Si ponga il 3 sopra una linea a destra, ed il dividendo 3000 a sinistra in questo modo

*divisore* 3 *dividendo* 3000

———

Indi si divida il 3 del 3000 per 3 divisore, e poichè 3 misura 3 una volta si scriva 1 sotto la linea. Indi i 3 zeri del 3000 passino al fianco sinistro dell' 1 in questo modo

*divisore* 3 *dividendo* 3000

———

1000

Sarà 1000 il quoziente di 3000 diviso per 3: ossia **3000** è decomponibile in 1000 parti, ciascuna delle quali è **uguale a 3**, ovvero è decomponibile in 3 parti, ciascuna delle quali è uguale a 1000.

*Esempio 2. — Sia da dividere* 2700 *per* 3. Voi scriverete

*divisore* 3 *dividendo* 2700

900

Indi dividerete 27 per 3 ed al quoziente 9 aggiungerete tanti zeri quanti ne sono nel dividendo, e farete così 900, e direte il 3 in 2700 è contenuto 900 volte, o pure il numero 2700 è decomponibile in 900 parti, ciascuna uguale a 3. E la ragione si è, che in questa operazione il 2700 è stato decomposto in 27 centinaia; il quoziente dunque dinota 9 centinaia. Or come il leggitore conoscerebbe il 9 dinotare parti di centinaia, se non seguissero due zeri? Questi non essendo, ognuno a capriccio potrebbe leggere *nove unità*. Gli zeri levano l'equivoco ed avvertono il leggitore del valore giusto e proprio del 9.

## § 17.

*Dividere un numero in parti multiple di un numero semplice.*

Dicesi un numero *multiplo o moltiplice di un altro,* allorchè ne è misurato esattamente. Così 24 è multiplo di 8, 45 è multiplo di 9.

*Sia il numero 4572 da dividersi in parti multiple di 3.* Il detto numero 4572 è decomponibile in 4000+500+70+2. Il 4000 si può considerare diviso in 3000 e 1000. Abbiamo dunque una parte del numero maggiore ossia il 3000 che è multipla di 3. *Ecco la prima parte multipla di 3.*

Il 1000 si può sciogliere in 10 centinaia, queste unite a 5 centinaia daranno 15 centinaia che contengono esattamente il 3, *ecco una seconda parte multipla di* 3.

Il 70 si può ridurre in 60 e 10 unità, ed *ecco* 60 *terza parte multipla di* 3.

Il 10 offre 10 unità, che aggiunte alle 2 formano 12 unità, misurabili esattamente da 3. *Ecco la quarta parte multipla di 3.*

Il numero dunque 4572 ha per parti multiple di 3 i numeri 3000+150+60+12. Se togliamo gli *zeri* e suppliamo colla mente a' valori rispettivi, diremo che le parti multiple sono 3, 15, 6, 12, che secondo i loro posti si leggono 3 *migliaia*, 15 *centinaia*, 6 *decine*, 12 *unità.*

*Esempio 2.—Sia il numero 64,202 da dividersi in parti multiple di* 7.

Dalla tavola Pitagorica si osserva che 63 è multiplo di 7 e non 64; si separino dunque le 63 migliaia: *ecco la prima parte multipla di* 7. Il migliaio di eccesso è divisibile in 10 centinaia che, unite a 2 centinaia del dividendo, danno 12 centinaia divisibili in 7 centinaia + 5 centinaia. Si separi il 7: *ecco la seconda parte multipla di* 7. Le 5 centinaia, unite a *zero* seconda cifra del dividendo, danno 50 decine. Or 50 è composto da 49 multiplo di 7 ed 1: si separi il 49: *ecco la terza parte multipla di* 7. L'1 si decomponga in 10 unità, che unite alle 2 ultime danno 12 unità. Queste sono decomponibili in 7+5: si separi il 7, *ultima parte multipla di* 7 e resta 5 residuo. Il numero dunque 64202 è decomponibile in 63 *migliaia*, 7 *centinaia*, 49 *decine*, e 7 *unità* + 5 *residuo*, e più brevemente in 63, 7, 49, 7+5.

*Esempio 3. — Sia da dividersi 48935678900 in parti multiple di* 7.

Si dispongano come siegue

7 48935678900 e si dica con linguaggio

più breve e spedito

48 non è multiplo di 7, ma lo è 42: restano 6 (*da unirsi a 9*)
69 non è multiplo di 7, ma lo è 63: restano 6 (*da unirsi a 3*)
63 è multiplo di 7
56 è multiplo di 7
7 è multiplo di 7 (1)
8 non è multiplo di 7, ma lo è 7; resta 1 (*da unirsi a 9*)
19 non è multiplo di 7, ma lo è 14: restano 5 (*da unirsi a 0*)
50 non è multiplo di 7, ma lo è 49: resta 1 (*da unirsi a 0*)
10 non è multiplo di 7, ma lo è 7: restano 3 unità indivisibili per 7; dunque le parti multiple di 7 sono
42, 63, 63, 0, 56, 7, 7, 14, 49, 7, *restano 3 indivise*

*Avvertimento 1.*

A non cagionare disperdimento nell'operazione, si noti un punto sotto la cifra con cui si unisce il residuo dell'antecedente di-

(1) Qui « 7 è *multiplo di* 7 » si prende nel senso, che 7 contiene se stesso: useremo di tal linguaggio, ogni quante volte vorremo dinotare un numero misurato da se stesso. Così 12 è multiplo di 12 « ossia 12 è misurato da 12. »

visione. Così quando si unisce il 6 al 9 si mette il punto sotto il 9, e similmente degli altri.

*Avvertimento 2.*

Accadendo dover notare due punti per due cifre, ( come è accaduto nella quarta divisione, in cui non bastando il 5, si è sceso il 56 ) si apporrà 0 nel luogo delle parti multiple, per dinotare che mancano parti significative a dividere. Così lo zero 0 posto al 4. luogo dinota, che mancano a dividere le *parti millionesime*, ossia *il numero dato non offriva parti millionesime uguali a 7.*

## § 18.

*Dividere un numero composto per un numero semplice.*

Due sono i metodi che vi propongo, o giovanetti, a dividere un numero composto per un numero semplice. Il primo si dice *metodo dimostrativo* o *scientifico*, e l'altro *metodo pratico*, ne' quali ambedue vi eserciterete sin tanto da correttamente e velocemente eseguirli.

*Metodo dimostrativo o scientifico.*

*Esempio 1. — Sia da dividersi il numero 486 per 6.*

Si divida il 486 in parti multiple di 6, come si è proposto nel paragrafo antecedente, le quali sono 48 e 6. Indi si vegga quante volte le parti multiple del dividendo contengono il divisore, e così si conoscerà quante volte tutto il dividendo contiene il divisore, giusta il principio esposto nel § 11 di questo titolo. Che però si scriva 6 a sinistra e 48 e 6 a destra. Si tiri sotto il divisore 6 una linea, come siegue

6    48, 6 e si dica
———
81

Il divisore 6 in 48 entra 8 volte: noto 8 sotto il divisore; 6 entra 1 volta in 6, noto 1 al quoziente; dunque il quoziente sarà 81, e dinota quante volte il 6 è contenuto in 486.

*Esempio 2.* — *Sia da dividersi* 1908 per 8

Si divida il numero 1908 in parti multiple di 8, e tali parti multiple saranno 16, 40, 8. Si notino, come siegue

8
———
251          16, 40, 8, e si dica

8 in 16 *due* volte
8 in 40 *cinque* volte
8 in 8 *una* volta

Si scrivano il 2, il 5, l'1 sotto la linea del divisore, ed il quoziente sarà 251.

*Esempio 3.* — *Sia da dividersi* 48935678900 per 7. Diviso il vasto numero in parti multiple di 7, come si è fatto nel 3. esempio del § antecendente, diverrà decomposto, come siegue.

7
———
6990811271          42, 63, 63, 0, 56, 7, 7, 14, 49, 7+3

e si dica

7 in 42 entra 6 volte
7 in 63 —— 9
7 in 63 —— 9
7 in 0 —— 0
7 in 56 —— 8
7 in 7 —— 1
7 in 7 —— 1
7 in 14 —— 2
7 in 49 —— 7
7 in 7 —— 1 restano 3: dunque il quoziente, volte per volte notato sotto la linea, darà 6990811271 e restano 3 indivise.

*Modo pratico di dividere.*

*Sia il numero* 4572 *da dividersi per* 3.

**1.** Si scriva il divisore a fianco del dividendo a qualche distanza, e si tiri sotto di esso una linea, come siegue

| | |
|---|---|
| 3 | 4572 |
| —— | 3··· |
| 1524 | —— |
| | 15 |
| | 15 |
| | —— |
| | =7 |
| | 6 |
| | —— |
| | 12 |
| | 12 |
| | —— |

Si vegga il 3 quante volte è contenuto nella prima cifra del dividendo, e siccome vi è contenuto uua sola volta, così si scriva 1 sotto la linea del divisore.

Si moltiplichi il divisore 3 pel quoziente 1, ed il prodotto 3 si scriva sotto il 4 del dividendo, e si sottragga da esso, scrivendo il residuo 1.

Si noti un punto sotto il 5, terza cifra del dividendo, e questo 5 istesso si scriva a fianco del residuo 1; talmente che si avrà 15 per *secondo dividendo.*

Si vegga quante volte il 3 divisore è contenuto in questo secondo dividendo 15, e poichè vi è contenuto 5 volte esattamente, si scriva il 5 del quoziente al fianco destro del primo quoziente.

Si moltiplichi questo secondo quoziente pel divisore 3, e si scriva il prodotto 15 sotto al secondo dividendo 15, da cui sottraendosi si riceverà il residuo *zero* notato con =

Si noti un punto sotto il 7, seconda cifra del dividendo, e si scriva questo stesso 7 a fianco del secondo residuo zero, e faccia officio di *terzo dividendo.*

Si vegga quante volte il divisore 3 è contenuto nel terzo dividendo 7, e poichè ci è contenuto 2 volte, si scriva 2 nel quoziente a fianco destro del 5.

Si moltiplichi 2 quoziente per 3 divisore e il prodotto 6 si sottragga dal terzo dividendo 7, ricevendosene per residuo 1.

Si noti il 2, prima cifra a destra del dividendo, e si scriva a fianco del residuo 1; talchè unito con questo compia 12, e faccia officio di *quarto dividendo.*

Si vegga quante volte il divisore 3 è contenuto nel 12;

e poichè vi è contenuto 4 volte, così si scriva il 4 a destra del quoziente delle altre tre cifre ritrovate.

Si moltiplichi finalmente il 4 quoziente pel divisore 3, ed il prodotto si sottragga dal quarto divisore 12, ricevendone il residuo *zero*, e si dirà, che il 3 nel dividendo 4572 è contenuto *mille cinquecento e ventiquattro volte*, ossia il 4572 è decomponibile in 1524 parti, ciascuna delle quali è uguale a 3.

*Esempio* 2. *Esempio* 3.

```
       8  9328950                 9  1000000
 ─────────  8······          ───────  9
 1166118  ───                111111  ───
           13                         10
          =8                           9
          ───                         ───
           52                          10
           48                           9
          ───                          ───
          =48                           10
           48                            9
           ───                          ───
           =9                            10
            8                             9
           ───                           ───
            15                            10
           =8                              9
            ───                           ───
             70                            1 Residuo
             64
            ───
             6 Residuo
```

*Avvertimento*

Il punto si appone sotto la cifra del dividendo a misura che queste si calano a fianco de' rispettivi residui per dar segno a chi calcola di essersi sin là progredito coll' operazione, come abbiamo pure notato per l'operazione precedente(*avvert.* 1 § 16). Chi non usasse di questa o qualche altra simile cautela, potrebbe facilmente scendere a fianco de' residui una cifra invece di un' altra, ed introdurre disordini ed errori nel calcolo.

## § 19.

*Riflessione su' due metodi proposti.*

Da quel che avete osservato, i due metodi non differiscono tra loro che nella più breve o più distesa maniera di eseguire. Il fine della divisione si è di vedere quante volte il dividendo contenga il divisore. Ciò non si può ottenere che col fissare le parti del dividendo, multiple del divisore. Precisate queste in fatti, ognuno dirà: *sapendo quante volte le parti del dividendo contengono il divisore, si deve sapere certamente quantevolte il tutto dividendo contiene il divisore.* A questo mena il *metodo scientifico.* Ma che altro fa il *metodo pratico*, se non spogliare le parti del dividendo del dippiù di cui sopravvanza al divisore? Che cosa restano il *primo dividendo, il secondo dividendo, il terzo dividendo* ec. dopo la sottrazione a cui si sottomettono, se non la prima parte multipla, la seconda parte multipla, la terza parte multipla ec. del divisore? Nel *primo esempio* antecedente le parti multiple di 3 ritrovate per mezzo della sottrazione sono 3, 15, 6, 12: *nel secondo* le parti multiple di 8 sono 8, 8, 48, 48, 8, 8, 64 + *res.* 6: *nel terzo* le parti multiple di 9 sono 9, 9, 9, 9, 9, 9 + *res.* 6. Il primo metodo dunque supplisce mentalmente, l' altro esiegue attuando.

## § 20.

*Dato un numero composto, dividerlo per un numero un divisore parimente composto.*

L' operazione, che vi propongo o giovanetti, non è così facile, come quella, che vi proponeva nel § 17, quando si trattava dividere un numero composto per un numero semplice. In questa vi è bisogno di maggiore fatica e più diligente attenzione. Ed al maggiore e più agevole intendimento della cosa, v'invito alla regola che siegue.

Se le cifre del numero divisore costano p. e. di centinaia, decine ed unità, e le cifre prese a dividere costano parimenti di centinaia decine ed unità, quelle debbono misurar queste un eguale numero di volte. Così se 3 volte le centinaia misurano le centinaia, anche 3 volte le decine dovranno misurare le decine, ed anche 3 volte le unità dovranno misurare le unità. In questo solo

caso si potrà dire *il numero divisore ha misurato il numero dividendo 5 volte.*

Che se il calcolatore si accorge, che mentre le centinaia del maggiore misurano 3 volte le centinaia del minore, per lo contrario le decine non misurano 3 volte le decine del maggiore, e le unità non misurano 3 volte le unità, allora bisogna tentare la divisione non più per 3 volte, ma per 2: e se la divisione per 2 non è comune alle dette parti, è necessità, che si tenti per 1. Ciò dagli aritmetici dicesi *scalare.* Ciò premesso

*Esempio 1. — Sia il numero* 233 *da dividersi per* 39.

Si dispongano; come siegue

| 39 | 233 |
|---|---|
| | 195 |
| 5 | |
| | 38 |

Il 233 si supponga diviso in 23 decine e tre unità: il 39 dal suo canto si supponga diviso in 3 decine e 9 unità: e si dica

Le 3 decine del divisore misurano 7 volte le 23 del dividendo, e 2 restano dippiù ossia 20 unità, che unite alle 3 dell' ultima cifra formano 23 unità, ma le 9 unità di quello non misurano 7 volte le 23 unità di questo; che però nostro impegno sia farle misurare da ugual numero di volte.

Si cominci a *scalare* ossia a supporre che le 3 decine del divisore non misurino 7 volte le 23 decine, ma 6 volte, talchè il residuo in questo caso sarebbe di 5, mentre da 18 a 23 ci vogliono 5 decine. Queste equivalgono a 50 unità, che aggiunte a 3, farebbero 53 unità, e si dirà per la prima volta.

Le tre decine del divisore misurano 6 volte le 23 decine del dividendo, ma le 9 unità del primo non misurano pure 6 volte le 53 unità di questo; mentre 6 volte 9 dà 54 e non 53. Dunque si *scali* la seconda volta e si dica

Supponghiamo, che le tre decine del divisore entrino nelle 23 decine del dividendo 5 volte. Allora, poichè 3 di 5=15 e da 15 a 23 ci vogliono 8, l'avvanzo sarà di 8 decine ossia 80 unità, che aggiunte alle 3 del dividendo formano 83. Ed or si dica

Le tre decine del divisore entrano 5 volte nelle 23 decine del dividendo: le 9 unità di quello anche entrano 5 volte nelle 83 unità di questo, dunque il vero quoziente è 5.

Si noti il 5 sotto il divisore 39: si moltiplichi il 5 per 39 e'l prodotto 185 si sottragga dal dividendo, notandosene il resi-

duo 38 e si dirà « *233 contiene 5 volte 39 col residuo 38* ovvero *233 diviso per 39 dà per quoziente 5 col residuo 38.*

Esercitatevi o giovanetti, in simili *scalazioni* aritmetiche, e voi vi troverete spediti ed agevolati a qualunque divisione di numeri composti, come nella operazione che seguirà.

*Esempio 2.* —

| *Divisore* | 26 | *Dividendo* | 4320 |
|---|---|---|---|
| | 166 | | 26 |
| | | | 172 |
| | | | 156 |
| | | | 160 |
| | | | 156 |
| | | | 4 |

*Soluzione.*

2 in 4 entra 2 volte, ma 6 in 3 non entra 2 volte. Farò dunque che 2 in 4 entri 1 volta, mi darà il residuo 2, che unito a 3 diviene uguale a 23: ora il 6 è benissimo contenuto 1 volta in 23. Scrivo dunque 1 al quoziente: moltiplico quest'1 per 26, ed il prodotto 26 lo sottraggo da 43, notandone il residuo 17.

A fianco del residuo 17 noto il 2 del dividendo, e ne ho per *secondo dividendo* 172. Procedendo al modo istesso, dopo due *scalazioni* poi fisso, che 2 entra 6 volte in 17 e dico:

2 è contenuto 6 volte in 17 e mi dà il residuo 5, che unito al 2 seguente forma 52. Ora il 6 è contenuto anche 6 volte in 22: scrivo dunque 6 al quoziente: moltiplico 6 per 26, ed il prodotto 156 lo sottraggo dal secondo dividendo 172, notandone il residuo 16.

A fianco del residuo 16 calo lo *zero* seguente dal dividendo, e'l numero 160 considererò per *terzo dividendo* e dirò

2 in 16 entra 8 volte, ma 6 in 0 non entra 8 volte; che però supporrò che ci entri 7 volte e dirò

2 in 16 entra 7 volte e restano 2, che unite a 0 formano 20. Ma 6 non entra 7 volte in 20, dunque *scalando* la seconda volta supporrò che 2 in 16 entri 6 volte. Resteranno 4 di avanzo, che unite a *0* formano 40, e dirò

2 in 16 entra 6 volte: 6 in 40 pure entra 6 volte: dunque mi atterrò a 6 per quoziente, che noterò sotto al divisore.

Moltiplicherò 6 pel divisore: sottrarrò 156 dal 160 e notato il residuo 4 e dirò « *Il numero 4320 diviso per 26 dà per quoziente 166 col residuo.*

*Esempio 3. — Sia* 28567 *da dividersi per* 349.

Si noti come siegue

| *Divisore* | 349 | *Dividendo* | 285678 |
|---|---|---|---|
| | ——— | | 2792 |
| | 81 | | ——— |
| | | | 647 |
| | | | 349 |
| | | | ——— |
| | | | 298 |

Non potendo destinare 285 per *primo dividendo*, perchè minore di 349, farò che il dividendo fosse costituito di quattro cifre 2856, e dirò

3 in 28 entra 9 volte, e resta 1, che premesso a 5 fa 15. Or 4 non entra 9 volte in 15. Che però *scalando* dirò

3 in 28 entra 8 volte e restano 4, che premesse a 5 formano 45. Or 4 in 45 anche entra 8 volte coll' avvanzo di 13, che premesse a 6 formano 136. Ma 9 in 136 anche entra 8 volte, dunque appongo 8 per quoziente

Moltiplico 8 pel divisore, e sottraggo il prodotto da 2756, notandone il residuo 64. Al suo fianco noto il 7 ed avuto 647 per *secondo dividendo* dirò

3 in 6 entra 2 volte, ma 4 in 4 non entra 2 volte; che però pongo 1 al quoziente e operando, come è detto, otterrò per quoziente 81 col residuo 298.

## § 20.

### *Riflessioni, per le quali si giustifica il procedimento aritmetico sulla divisione de' numeri composti.*

La divisione, come avete potuto osservare, o giovanetti, è una vera decomposizione del dividendo in parti multiple del divisore. Il metodo *scientifico* o *dimostrativo* vi menava a ciò, quando vi proponeva dividere un numero composto per un numero semplice (*§ 17 di questo titolo*). A ciò vi mena ancora il procedimento sulla divisione di un numero composto per un altro numero composto. Imperciocchè voi avete sciolto il dividendo in più dividendi minori, chiamandoli *dividendo primo*, *dividendo secondo*,

*dividendo terzo* ec. Così, rivolgendo l'occhio sull'esempio 2. antecedente, voi sotto ciascun dividendo minore avete scritto il prodotto del rispettivo quoziente pel divisore; così nell' operazione indicata avete scritto 26 sotto *il primo dividendo*, 156 sotto il *secondo dividendo*, 156 sotto il *terzo dividendo.* Ma che cosa è questo prodotto del quoziente pel divisore, se non un multiplo del divisore? Dunque voi avete sciolto il dividendo in

26 multiplo di 26=26×1
156 multiplo di 26=26×6
156 multiplo di 26=26×6 *residuo* 4

ed avendo veduto quante volte ciascuna parte multipla di 4320 conteneva il 26, avete potuto conchiudere, quante volte tutto il numero 4320 contiene il divisore 26 escluso il residuo 4.

Che 26 *centinaia*, 156 *decine*, 156 *unità* + *il residuo* 4 fossero le parti costituenti del numero 4320, non vi è luogo a dubitare. Scrivetele in fatti le une sotto le altre, da sinistra a destra colla corrispondenza locale: sommatele e ne avrete riprodotto 4320.

```
26
156
 156
———————
4316+4=4320
```

## § 22.

*Casi, che possono avvenire nella divisione di un numero composto per un numero semplice.*

Quattro casi possono avvenire nella divisione.

*Caso 1.*

Può avvenire che il divisore sia minore della prima cifra del dividendo, e la divisione a bel principio si dichiara impossibile. Allora si vegga quante volte il divisore sia contenuto nelle due prime cifre. Così:

```
Divisore     7        Dividendo 1505
            ———                 14
Quoziente  215                 ———
                              = 10
                                 7
                               ———
                                35
                                35
                               ———
                               ===
```

Il divisore 7 non può essere contenuto in 1, lo sarà contenuto in 15 e l'operazione procede.

*Caso 2.*

Può accadere che uno de' residui sia 0, e la cifra che si cala dal dividendo sia minore del divisore. Se ne calino allora due e si apponga 0 al quoziente, per dinotare la mancanza della parte del dividendo che non è assimilabile col divisore. Così:

| *Divisore* | 6 | *Dividendo* | 18235 |
|---|---|---|---|
| | ――― | | 18 |
| | $3039\,\frac{1}{6}$ | | ――― |
| | | | = 23 |
| | | | 18 |
| | | | ――― |
| | | | = 55 |
| | | | 54 |
| | | | ――― |
| | | | = 1 |

Quivi 6, dividendo 18, non ha dato residuo: e 2 che si scendeva, non è divisibile per 6. Si scendano due cifre, ossia 23, e si noti 0 nel quoziente, per dar segno che il dividendo non offre centinaia a dividersi. Il 2 poi per essersi riunito alle decine, ha formato 23 decine, le quali divise per 6 danno 3 al quoziente, e l'operazione si è rimessa.

*Caso 3.*

Avviene sovente, che il dividendo non è esattamente divisibile in parti eguali al divisore; che però dà luogo a residuo. Si ponga allora il residuo sopra una linea a destra del quoziente ritrovato, e sotto si scriva il divisore, formandosi così un rotto, di cui si dichiarerà il valore nel titolo seguente. Così data la divisione seguente col residuo 3

| *Divisore* | 7 | *Dividendo* | 4567 |
|---|---|---|---|
| | ――― | | 42 |
| *Quoziente* | $652\,\frac{3}{7}$ | | ――― |
| | | | = 36 |
| | | | 35 |
| | | | ――― |
| | | | = 17 |
| | | | 14 |
| | | | ――― |
| | | | = 3 |

Il residuo 3 si metta sopra una linea a fianco del quoziente 652, e sotto la stessa si scriva il divisore 7, che formerà il rotto $\frac{3}{7}$ e si dirà il *quoziente di 4567 per 7 è 652 e tre settimi.* »

## § 23.

### *Teorie de' divisori comuni e del massimo comun divisore.*

Gli Aritmetici dicono *comune divisore* quello, che divide esattamente due numeri. Così 24 e 72 possono avere per *comune divisore* il 2, il 4, il 6, l' 8, il 12, poichè ciascuno di questi divide esattamente sì 24 che 72. Ma fra tanti comuni divisori vi deve essere uno, di cui non se ne può supporre uno più grande, ossia fra tanti comuni divisori vi deve essere il *massimo comune divisore.* Quale sarà il più grande fra tutti? La considerazione *de' divisori e de' massimi comuni divisori* dà luogo a' teoremi che seguono.

### *Teorema 1.*

*Se un numero è divisore comune a due numeri, e questi due numeri si dividono fra loro, anche il loro resto sarà diviso da quel divisore comune.* Sieno i numeri 428 e 32 che hanno per divisore comune 4: ed il resto di 428 diviso per 32 sia 12: dico che 12 anche è divisibile per 4. In fatti se 4 divide tutta la frase esattamente ossia 428, e divide parte della frase cioè 32: dovrà dividere esattamente anche il resto della frase cioè 12 (*teor.* 3. § 13).

### *Teorema 2.*

*Il divisore comune a due numeri divide il massimo comune divisore degli stessi numeri.*

Sieno i numeri 84 e 48, di cui comune divisore sia 6, ed il massimo comune divisore sia 12.

Il comune divisore 6 se divide 84 e 48 dividerà pure il resto 36 (*Teor.* 1. *antec.*). Se poi divide 36 e 48, dividerà pure il resto 12 per la medesima ragione. Ma 12 è massimo comun divisore; dunque il divisore comune di due numeri divide pure il massimo comune divisore.

### *Teorema 3.*

*L' aliquoto di un numero è pure massimo comun divisore tra se aliquoto e l'altro multiplo.*

Sia 6 aliquoto di 18: io dico, che 6 è anche massimo comun divisore di 6 e 18. Impereiocchè, ad avere il massimo comun divisore tra 18 e 6, vi bisogna un numero il più grande che fosse possibile, il quale misuri 6 e 18. Or niun numero si può dare maggiore di 6 che misurasse 6; dunque 6 deve essere il massimo comun divisore.

Così dati i numeri 598 e 46: poichè 46 misura 13 volte esattamente 598, il massimo loro comun divisore sarà 46.

*Teorema 4.*

*Sia un numero maggiore diviso per un numero minore, e siavi pure un resto; il massimo comune divisore de' due primi è lo stesso che il massimo comun divisore del minore e del resto.*

*Sia* 910 *diviso per* 272 *che dia per resto* 94; io dico che il massimo comun divisore di 910 e 272 è lo stesso che il massimo comun divisore di 272 e 94 — Supponghiamo, che il massimo comune divisore di 272 e 910 sia 2: io dico, che 2 è pure massimo comun divisore del minore 272 e del resto 94. Ed invero: se 2 divide 910 e 272, dividerà anche il resto 94 (*Teor. 1.*). Ma non solo 2 sarà esatto divisore del resto 94, ma sarà pure massimo comune divisore di 272 ed 94. Supponghiamo infatti che il massimo comune divisore di 272 e 94 sia non già 2, ma un' altro numero p. es. 6. Allora che ne avverrà? Poichè 910 diviso per 272 da per *quoziente* 3 + *il residuo* 94, ed il dividendo è uguale al divisore×pel quoziente+il residuo (§ 12), sarà $910 = 272 \times 3 + 94$. Or se 6 divide 274 e 94, dividerà pure $272 \times 3 + 94$. (*Teor.* 1 §. 13). Ma $272 \times 3 + 94 = 910$, dunque 6 dividerebbe non solo 272, ma anche 910; ma noi abbiamo detto che 2 era il massimo comune divisore, ossia che al di là di 2 non vi sarebbe stato un numero più grande che avesse diviso 910 e 272; dunque, poichè anche 6 è massimo comun divisore, il detto 2 sarebbe e non sarebbe massimo comune divisore, ciò che non può essere. Laonde 2 che è massimo comune divisore di 910 e 272, è pure massimo comune divisore di 272 e 94.

## § 24.

*Decomporre un numero in fattori primi.*

Si dicono *fattori primi* que' numeri, che concorrendo alla formazione di un prodotto, non hanno per divisori comuni, se non l'unità 1. Così 3 e 2 concorrono ambedue alla formazione del numero 6, ma essi però non hanno un divisore comune, eccettocchè 1.

Or poichè tutti i numeri pari hanno per divisore comune 2 (§ 14. *num.* 3), quindi il rinvenimento de' fattori primi non può avverarsi che tra 2 ed i dispari 3, 5, 7, 9, 11, etc.

Sia da decomporsi 360 in fattori primi: si disponga l' operazione come segue:

| | |
|---|---|
| A — 360 | 1 |
| B — 360 | 2 |
| C — 180 | 2 |
| D — 90 | 2 |
| E — 45 | 3 |
| F — 15 | 3 |
| G — 5 | 5 |

Si divida 360 per 1; darà 360 in B.
Si divida 360 per 2; il quoziente 180 si noti sotto 360 in C.
Si divida 180 per 2; si avrà 90 in D.
Si divida 90 per 2; si avrà 45 in E.
Si divida 45 per 3; si avrà 15 in F.
Si divida 15 per 3; si avrà 5 in G.
I fattori dunque di 360 sono $1\times2\times2\times2\times3\times3\times5$.

E siccome un numero moltiplicato tre volte per se stesso dicesi *potenza terza*, ed un numero moltiplicato due volte per se stesso dicesi *potenza seconda*, e le potenze terze si notano con un piccolo 3 superiormente a destra, e la potenza seconda si nota con un piccolo 2, così la frase diverrà $2^3\times3^2\times5$ « *ossia* 360 *ha per fattori primi* 2 *elevato prima a potenza terza, poi moltiplicato per* 3 *elevato a potenza seconda, e finalmente moltiplicato per* 5.

## § 25.

*Trovare tutti i divisori di un numero dato.*

*Sia il numero 210, di cui si vogliano sapere tutti i divisori possibili.*

Si sciolga 210 ne' fattori primi, come nel § *antecedente* in questo modo

| | |
|---|---|
| 210 | 1 |
| 210 | 2 |
| 105 | 3 |
| 35 | 7 |
| 7 | 1 |

e si avranno per suoi fattori 1×2×3×5×7. Il prodotto di tutti questi fattori dovrà riprodurre 210. Che però i divisori composti dovranno sorgere dalle combinazioni possibili di 1. 2. 3. 5. 7. Ed a combinarli, dispongansi i dividendi in colonne in questo modo.

| | |
|---|---|
| 210 | 1 |
| 105 | 2 —— X |
| 35 | 3, 6 —— A |
| 7 | 5, 10, 15, 30 —— B |
| 1 | 7, 14, 21, 42, 35, 70, 105, 210 — C |

E si proceda così:

Ogni fattore moltiplicato per 1, dà sempre l'istesso fattore, per cui non se ne scriva il prodotto. Così 2×1=2, non si scriva.

I prodotti di un fattore per tutti gli altri fattori si notino a fianco dell'istesso fattore. Così 3 della serie A dovendosi moltiplicare per 2 della serie X abbia il prodotto 6 al fianco, come in A.

Similmente 5 della linea B, dovendosi moltiplicare per 2 della linea X, per 3 e per 6 della linea A, abbia al suo fianco il 10, il 15, il 30 come nella linea B.

Per ultimo 7 dovendosi moltiplicare per 2 della linea X, per 3 e per 6 della linea A, *più* per 5, per 10, per 15, per 30 della linea B, abbia al suo fianco i rispettivi prodotti 14, 21, 42, 35, 70, 105, 210 come nella linea C.

I divisori dunque di 210 sono 2 della linea X; poi 3 e 6 della linea A; 5, 10, 13, 30 della linea B; finalmente 7, 14, 21, 42, 35, 70, 105, 210 della linea C. Numerandoli tutti, i *divisori* di 210 sono 15, ed il *massimo comun divisore* è 105.

## § 26.

*Ritrovare il massimo comune divisore tra due numeri.*

*Sia da trovarsi il massimo comune divisore tra* 84 *ed* 428.

Il metodo ordinario di ritrovare il massimo comun divisore sarebbe quello espresso nel § *antecedente*, dove si è veduto che fra i 15 divisori possibili di 210 il massimo era 205. Ma chiedendo un tal metodo una lunga operazione, noi ne indicheremo una più breve, che qui segue.

Si divida il maggiore 428 pel minore 84, e se ne noti il residuo 8. Indi questo residuo 8 divida 84, e se ne noti il residuo 4. Questo residuo 4 divida infine 8, e poichè lo divide esattamente, sarà 4 il massimo comune divisore de' numeri proposti 428 e 84.

Si dispongano infatti i numeri dati e i ricercati residui in questo modo:

428, 84, 8, 4

e si dica così: de' due numeri 8 multiplo e 4 aliquoto, il massimo comune divisore è 4 (*Teor.* 3. § 23.). Ma se 4 è massimo comune divisore di 4 e 8, ossia del minore e del resto, è massimo comune divisore di 84 e 8 (*Teor.* 4 *antec.*). Se infine 4 è massimo comune divisore di 84 e 8 sarà massimo comune divisore di 84 ed 428 (*Teor. 4.*).

Regola dunque generale sia

*Si divida il maggiore pel minore; e si noti il resto:*

*Si divida il minore pel resto, e così in prosieguo*

*Quel resto, chè dividerà esattamente l'antecedente divisore, sarà massimo comun divisore.*

*Esempio* 2.— *Sieno i numeri* 336 e 144. Dividendo 336 per 144 minore, si ottiene il resto 48: questo resto facendo da divisore, faccia da dividendo 144 e se ne otterrà per resto 48. Questo 48 resto divida 48, che era per lo innanti divisore, e poichè lo divide esattamente, esso 48 sarà *massimo comun divisore* di 336 e 144.

## § 27.

***Fatta la moltiplicazione verificare, se si è o no incorso in errore.***

La moltiplicazione si verifica colla divisione.

Sia infatti moltiplicato il numero A per B, di cui il prodotto sia C.

```
  4283——A
    52——B
  ——————
   8566
 21415
 ———————
 222716——C
```

Il prodotto C contiene il numero A tante volte quanto lo dice B: chè però esso è decomponibile in tante parti uguali ad A,

quante ne dinota B. Che si decomponga dunque il numero C in parti eguali ad A, ma di tanto numero, quanto lo dinota B. In altri termini si divida il prodotto C pel fattore B, e se nel quoziente ne sortirà l'altro fattore A, l'operazione va esente di errore. In fatti si faccia, la divisione, come segue e si vedrà, che

```
   52          222716
  ----         208...
  4283         ------
               =147
                104
               -----
               =431
                406
               -----
               =256
                256
               -----
               =====
```

il prodot'o 222716 diviso per 52 ha dato nel quoziente 4283, che era l'altro fattore.

## § 28.

*Fatta la divisione, verificare se si è no incorso in errore.*

Sia il numero A diviso per B, ed abbia dato per quoziente C.

```
     52 — B       222716 — A
    ----          208
   4283 — C       ----
     52           =147
   -----           104
   8566           ----
  21415           =431
  ------           406
 222716 — D        ----
                  =256
                   256
                  -----
```

Il numero A dividendo è decomposto, mercè la divisione, in tante parti uguali a B, quante lo esprime C. Che perciò moltipli-

cando il quoziente C pel divisore B, è tutta necessità che si riproduca il dividendo A. In breve; *si moltiplichi il quoziente pel divisore, e se il prodotto riprodurrà il dividendo, l' operazione va esente da errore.*

Così fatta la divisione, si moltiplichi C per B, e poichè il prodotto D ha riprodotto il dividendo A, l'operazione è esatta.

Se nella divisione vi fosse residuo, bisogna aggiungerlo al prodotto D.

## § 29.

*Lemmi alla pruova della moltiplicazione e divisione per mezzo del 9.*

*Lemma 1. — Il resto che si ha dal dividere un numero per 9 è lo stesso che quello che si ha dal dividere la somma delle cifre per 9.*

Sia 346 diviso per 9; dà per resto 4. Diviso $3+4+6$ ossia 13 per 9 dà pure 4 per resto. Imperocchè $346=300+40+6$. Or 300 diviso per 9 dà per resto 3 (§ 14. *num.* 12), 40 dà 4, e 6 è per se stesso resto, perchè indivisibile per 9: dunque i resti sono $3+4+6$; che però tanto è dividere $300+40+6$ per 9, quanto dividere $3+4+6$ per 9.

*Lemma 2. — Dividendo il prodotto di due numeri fra loro, per 9, si ottiene l' istesso resto, che si otterrebbe, se dividendo i numeri parziali per 9, il prodotto de' loro resti si dividesse per 9.*

Sieno i numeri 39 e 23, che si moltiplichino fra di loro: essi danno per prodotto 89[illegible]. Si divida questo prodotto per 9, e se ne avrà il resto 6.

Si divida sì il 39 che il 23 per 9. Dividendo 39 per 9 si avrà per quoziente 4 ed un residuo eguale a 3. Dividendo poi 23 per 9 si avrà per quoziente 2 ed un residuo eguale a 5. Ma poichè il dividendo contiene il divisore tante volte, quante volte lo dice il *quoziente + il residuo*, dunque

$$39 \textit{ diviso per } 9=9\times4+3$$
$$23 \textit{ diviso per } 9=9\times2+5$$

Ora in vece di moltiplicare 39 e 23 fra di loro, fra loro si moltiplichino i suoi equivalenti $9\times4+3$ e $9\times2+5$. Ma come eseguire ciò? Eccone il modo. Il moltiplicando $9\times4+3$ si supponga diviso in *parte prima* $9\times4$ e *parte seconda* $+\ 3$. Così il molti-

plicatore $9\times2+5$ vada diviso in *parte prima* $9\times2$ e *parte seconda* $+5$. Or si moltiplichi sì la prima che la seconda del moltiplicando per $9\times2$, *prima parte del moltiplicatore* e si avranno

| | | | |
|---|---|---|---|
| *parte 1.ª del 1.°* | $9\times4$ | *parte 2.ª del 1.°* | $+3$ |
| *parte 1.ª del 2.°* | | | $9\times2$ |
| *prodotti* | $9\times4\times9\times2$ | e | $9\times2\times3$ |
| | | ossia | |
| | $36\times18$ | e | $18\times3$ |

Poi si moltiplichi l'istessa prima e l'istessa seconda parte del moltiplicando per 5 *seconda parte del moltiplicatore* e si avranno,

| | | | |
|---|---|---|---|
| *parte 1.ª del 1.°* | $9\times4$, | *parte 2.ª del 1.°* | $+3$ |
| *parte 2.ª del 2.°* | | | $+5$ |
| *prodotti* | $9\times4\times5$ | e | $3\times5$ |
| | $36\times5$ | e | $3\times5$ |

Abbiamo dunque quattro prodotti $36\times18$, $3\times18$, $36\times5$ e $3\times5$. Ma i primi tre sono tutti multipli di 9 e perciò divisibili per 9. Resta solo a dividere $3\times5$ per 9 ossia 15 per 9: dividendosi, si avrà per resto 6.

Ma 3 era rimasto dal dividere 39 per 9, e 5 era rimasto dal dividere 23 per 9, e $3\times5=15$, dunque dividendo 15 (*prodotto de' resti di 39 e 23 divisi per 9*) per 9, si avrà l'istesso resto 6 che si avrebbe dal dividere il prodotto di 39 e 23 per 9. Sicchè dividendo il prodotto di due numeri per 9, se ne avrà l'istesso resto, che si avrebbe, se dividendo i numeri parziali per 9, il prodotto de' loro resti si dividesse per 9 (a).

## § 30.

*Pruova della moltiplicazione per mezzo del 9.*

*Sia* $7429\times346=$ *al prodotto* 2570434.

La sua moltiplicazione attuata sia come si vede

```
  7429——A
   346——B
  -----            4 | 7
  44574            --|--
 29716             4 | 7
22287
-------
2570434——C
```

(a) Ciò dilucida il § 212. di Carlo Rocco — *Aritmetica*.

Che s' intersechino ad angoli retti due linee, come nel margine, e si ragioni così:

La somma delle cifre A dà per resto quello che darebbe tutto il numero diviso per 9: così la somma delle cifre di B, e così quella del loro prodotto C. Si trovi dunque il resto di A diviso per 9, di B diviso per 9, di C diviso per 9, col togliere 9 quante volte più si può dalla somma delle loro cifre, e tali resti si notino agli angoli del segno apposto « ossia 4 *resto di* A, 4 *resto di* B, 7 *resto di* C. Questo resto del prodotto diviso per 9 dovrà essere uguale al resto del prodotto de' due resti di A e B fattori, diviso per 9. (*Lemma* 2. *antec.* ). Che si moltiplichino dunque i due primi resti, ossia 4×4, e'l prodotto **16** si divida per 9. Ma poichè questo resto è 7, dunque l' operazione va esatta.

Si dica l' istesso per qualunque altra moltiplicazione e si abbia per regola generale.

*Si tolga 9 dalla somma delle cifre di ciascun fattore, e somma delle cifre del prodotto degli stessi, e si notino i resti a' tre angoli del segno quadrangolare.*

*Si moltiplichino i due primi resti, e sottratto il 9 dalla somma delle cifre, si noti il resto al quarto angolo; se questo sarà identico al terzo, l' operazione sarà esatta.*

## § 31.

### *Pruova della divisione pel 9.*

Se il dividendo è un vero prodotto del divisore moltiplicato pel quoziente (§ 12. tit. 3) valerà l' istessa pruova per la divisione, che quella addotta pel la moltiplicazione.

Che però dalle tre somme delle cifre del divisore, del quoziente, e del dividendo si tolga il 9 per quante volte è possibile.

Si moltiplichino quoziente e divisore fra loro: si divida la somma delle cifre del prodotto per 9, e se il quarto resto sarà uguale al terzo, l' operazione si potrà credere esatta.

### *Avvertimento.*

Poichè una tale pruova in alcuni casi fallisce, è consiglio attenersi alle addotte ne' §§ 22 e 23.

# TITOLO IV.

## TEORIA DE' ROTTI O FRAZIONI.

### § 1.

*Idea de' rotti o frazioni.*

Giovanetti, insino ad ora avete sottomesso a calcolo *numeri interi, intere unità, intere grandezze o tutti*: vi spetta ora conoscere, come vi converrà procedere, se al vostro calcolo si presenteranno non più unità o grandezze intere, ma *parti di unità, parti di grandezze o tutti*. L' oggetto è importante, e conviene che vi spiegaste tutta la vostra più intensa riflessione.

E sulle prime supponete un tutto, una grandezza qualunque divisa in parti uguali fra loro.

Voi chiamerete *metà* ogni parte, se il tutto sarà diviso in due parti uguali; *parti terze, quarte, quinte, seste, settime, ottave, none, decime, centesime, millesime*, ec. se il tutto sarà diviso in 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 100, 1000 parti uguali, etc. Da queste segregatene alcune, e consideratele sole in rispetto al valore. Voi certamente, volendo comunicare ad altri quali e quante parti intendete denotare, vi sarà necessario tener di mira a due cose.

1. Quali parti simili volete sottomettere a calcolo.

2. Quante parti di queste simili volete *isolare* o *prelevare* da tanto numero.

Il numero delle parti simili, in cui avete diviso il tutto, lo chiamerete *Denominatore*; il numero delle parti *prelevate* o *isolate* da queste simili, lo direte *Numeratore*.

Separerete ambedue con una linea, facendo sì, che il *numeratore* occupi il luogo di sopra ed il *denominatore* il luogo di sotto.

Una quantità di simil fatta, la chiamerete *Rotto* o *Frazione*. *Rotto* dunque *o Frazione è una frase numerica, che dinota quante parti si sieno prese da un tutto diviso in parti uguali*. Ritenete tali facilissimi principii, e comprenderete facilmente gli esempii.

Io divido carlini 12 in otto parti uguali, che dico *parti ottave*, ciascuna delle quali mi dà grana 15; da queste *parti ottave* intendo prelevare 3 pel mio calcolo. Ecco il bisogno di due numeri; uno che dinoti aver diviso il tutto (*ossia carlini 12*) in 8 parti uguali,

l' altro che dinoti quante di queste parti ottave abbia io prelevate. Scriverò $\frac{3}{8}$: il 3 dirò *Numeratore*, e l' 8 *Denominatore*, e dirò *tre ottave*, *ossia tre parti ottave di carlini 12.*

Quest' ultima considerazione è necessaria. Non si deve enunciare un rotto senza prima chiamare allo spirito l'idea del suo valore: così se vorrò nominare tre palmi, dovrò subito ricordarmi, che il palmo è parte della canna, e che la canna si divide in 8 palmi: metterò sopra una linea il 3, e sotto di essa il numero 8, e ne avrò così il rotto $\frac{3}{8}$ *di una canna.*

Similmente se vorrò nominare 6 *once*, rifletterò che l' oncia è parte del palmo, e che il palmo si divide in 12 once; scriverò dunque $\frac{6}{12}$, e le dirò *sei parti dodicesime di un palmo.*

Così 7 cavalli si scriveranno $\frac{7}{12}$ di *un grano*: 8 rotola $\frac{8}{100}$ ossia 8 *centesimi di un cantaio*: 2 ore $\frac{2}{24}$, ossia *due parti ventesime quarte di un giorno.*

Esercitatevi, o giovanetti, in simili indicazioni e valutazioni di parti per qualsivoglia tutto diviso, e ne osserverete lezione per lezione il notabilissimo vantaggio.

## § 2.

### *Diverse specie de' Rotti.*

Le parti di un rotto diviso, riunite insieme, sono uguali allo stesso tutto; esse non sono, che lo stesso *intero* o *tutto* in diversa forma ed in diverso enunciato. Se io dividerò un tutto in tre parti, denominando ciascuna $\frac{1}{3}$: volendo tutte e tre farle nel mio computo entrare, non verrò a calcolare che lo stesso tutto, poichè ognuno comprende che $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ di un tutto, diviso in tre parti uguali, sono eguali all' istesso tutto, ossia eguali ad 1: così $\frac{1}{3}$ di una piastra ossia *carlini quattro, più* $\frac{1}{3}$ di una piastra ossia *altri carlini quattro, più* $\frac{1}{3}$ di una piastra ossia *altri carlini quattro* equivalgono a *carlini dodici*, cioè allo stesso tutto che si era diviso in $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$. In questo caso il rotto si dirà *rotto apparente*: esso è la stessa unità, ma in forma frazionaria: esso equivale ad 1. Così sono rotti apparenti $\frac{8}{8}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{65}{65}$, $\frac{1088}{1088}$ etc. e ciascuno di essi è uguale ad 1.

Avviene altre volte che le parti dell'unità divisa non bastino pel calcolo che si è impréso; che perciò è necessario, che a queste si aggiungano altre parti simili. Esse per dirsi simili, dovrà verificarsi 1. *che il secondo tutto sia uguale al primo*; 2. *che il secondo tutto sia diviso nello stesso numero di parti*, *in cui fu diviso il primiero.* Così, supposto il tutto in tre parti diviso, può avvenire che

non bastino al mio calcolo *tre parti terze*, ma che ne sieno necessarie *cinque, sei, sette*, ec. *parti terze*, ed allora, supponendo due tutti divisi in parti simili ed eguali, la frase diverrebbe $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{7}{3}$. Una tale frazione non è eguale ad un tutto, o ad una sola grandezza divisa in tre parti uguali, come nel caso precedente; ma essa abbraccia più di un tutto. Voi chiamerete un tal rotto *spurio*, ed intenderete per rotto spurio quello, *che abbia il numeratore maggiore del denominatore*: così sono rotti spurii $\frac{17}{4}$, $\frac{9}{6}$, $\frac{100}{84}$, $\frac{1004}{8}$ etc.

Ma in tal caso può avvenire, che il valore di un rotto spurio abbracci esattamente più grandezze senza lasciare alcun residuo: si dirà allora *rotto spurio multiplo*. Così sia $\frac{24}{3}$; poichè 24 contiene esattamente otto volte il denominatore 3, egli si dice *rotto multiplo*: Rotto spurio multiplo sarà $\frac{36}{6}$, il cui numeratore 36 assorbe 6 volte il denominatore 6: spurii multipli sono $\frac{16}{4}$, $\frac{100}{20}$, $\frac{25}{5}$, $\frac{400}{40}$ etc.

Ovvero può avvenire che oltre delle grandezze assorbite, si dia luogo ad un residuo, ed allora si dirà *rotto spurio non multiplo*; come sarebbe $\frac{10}{3}$, di cui il numeratore 10 abbraccia tre volte il denominatore 3, ossia 3 *unità* ed $\frac{1}{3}$ dippiù. Rotto spurio non multiplo è $\frac{64}{10}$, il cui numeratore assorbe 6 volte il denominatore, e fa restare altri $\frac{4}{10}$ dippiù: lo sono pure $\frac{83}{8}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{18}{4}$ ec.

Finalmente le parti prese dal numeratore possono essere più poche dalle parti espresse dal denominatore, come nel rotto $\frac{3}{5}$. Il valore di questo è certamente minore dell' unità, ognun conoscendo che *tre parti quinte* sono più poche di *cinque parti quinte*. che formavano il tutto. Una tal frase dà l' idea del *vero rotto* di unità, mentre non è rotto ciocchè è maggiore od uguale all' unità: è rotto chi è parte, non già chi è tutto o maggiore del tutto. Questo si dirà *rotto vero* a differenza de' precedenti. Sono rotti veri perciò $\frac{3}{7}$, $\frac{10}{20}$, $\frac{8}{60}$, $\frac{13}{14}$ ec.

I rotti possono quindi dividersi in

1. *Rotti apparenti* = = = all'unità.
2. *Rotti spurii multipli* = = a più unità.
3. *Rotti spurii non multipli* = a più unità ed un residuo.
4. *Rotti veri* = = = = minori dell' unità.

Fissata bene nella mente la divisione de' rotti, conviene devenire alle regole, come rilevare il giusto ed effettivo valore di ciaschedun rotto.

## § 3.

### *Valore de' Rotti.*

Da quanto si è finora esposto si rileva

1. Che il valore *del rotto apparente* p. e. $\frac{4}{4}$ è uguale a quel

l'unità reale o ideale, che si è supposta divisa in 8 parti: essendo troppo ragionevole che diviso un tutto in otto parti, e prendendole tutte otto, si prende l'intero tutto. La sua frase sarebbe $\frac{8}{8}=1$, ossia $\frac{8}{8}$ è *una frase frazionaria che equivale all' unità.*

2. Il valore del *rotto spurio multiplo* si ha dal dividere il numeratore pel denominatore; così il valore di $\frac{24}{8}$ si ha dal dividere 24 per 8, poichè contenendo il 24 più volte 8, bisogna dividerlo per 8, se vogliasi sapere quante volte lo contenga; e poichè 24 cotiene 3 volte l' 8, così la frase diverrà $\frac{24}{8}=3$, ossia $\frac{24}{8}$ è *una frase frazionaria che equivale a tre unità.*

3. Il valore del *rotto spurio non multiplo* si ha pure dal dividere il numeratore pel denominatore, e dedottone il quoziente notarne le parti che sono dippiù, e che non giungono a formare un'altra unità; così $\frac{25}{3}$ è uguale ad 8 intieri, perchè 25 contiene 8 volte il 3, e siccome vi è rimasta una terza parte di più, così questa deve parimente notarsi, e la frase $\frac{25}{3}$ diverrà $=8\frac{1}{3}$ ossia $\frac{25}{3}$ è *una frase frazionaria che equivale ad otto unità, più $\frac{1}{3}$ di unità.*

Quel che reca maggiore considerazione si è il modo di ritrovare il valore del rotto vero, pel retto intendimento del quale v' invito, o giovanetti, alla riflessione che segue.

## § 4.

### *Metodi di ritrovare il valore del rotto vero, e riflessioni su gli stessi.*

Due sono i metodi, che gli aritmetici adusano per rinvenire il valore del rotto vero; l'uno dicesi *Naturale*, l'altro *Artistico*.

Il *naturale* si è quello di dividere l'unità o grandezza data in tante parti eguali, quante ne indica il denominatore, e prelevarne poi tante, quante ne indica il numeratore, e ciò per la natura de' rotti (§ 1.) Così il valore di $\frac{4}{5}$ di un un ducato si ha con dividere il ducato in cinque parti eguali, e prelevarne 4, ciò che importa *carlini* 8.

Ma soventi volte, o giovanetti, il ritrovamento del valore del rotto vero col modo *ordinario* e *naturale* reca imbarazzo ben serio, e non rare fiate o inutilità o confusione nel calcolo. Ricercate in fatti il valore $\frac{3}{5}$ di una canna col metodo ordinario. Voi dovrete dividere la *canna ossia 8 palmi* in 5 parti eguali; la divisione non potendo essere esatta, si avrà un quoziente con un rotto ossia un 1 *palmo*+*più* $\frac{3}{5}$ di palmo. Dovrete poi prendere tre volte questo 1

palmo e $\frac{3}{5}$ per calcolare il numeratore, e scriverete $1\frac{3}{5}+1\frac{3}{5}+1\frac{3}{5}$ ossia $1+1+1+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+1\frac{3}{5}$, ossia 3 e $\frac{9}{5}$, e riducendo il rotto spurio $\frac{9}{5}$ ad unità e fratti, avete $3+\frac{4}{5}$, ossia $4\frac{4}{5}$. Chè noiosa operazione è mai questa? E quante altre operazioni non esige e presuppone?

Che però gli aritmetici, ad evitare sia lunghezza sia intoppo di calcolo, ricorrono al *mètodo artistico.* Consiste questo in supporre tanti tutti o grandezze, quanti ne indica il numeratore, dividerli in tante parti eguali, quante ne indica il denominatore, e prenderne una. Così nell' addotto esempio avrebberò essi diviso non un palmo, ma tre palmi, in cinque parti eguali, e ne avrebbero speditamente, là per là, al quoziente, ottenuto il valore di $4\frac{4}{5}$.

Egli conviene però giustificare la ragionevolezza di tale metodo artistico, e dimostrare perchè dividendo tre tutti in cinque parti eguali, e prendendone una, sia lo stesso, che dividere un solo tutto in cinque parti eguali e prenderne tre?

Giovanetti, io v' invito ad una riflessione ben seria, feconda d' interessanti conseguenze nella teoria de' rotti; sia vostra cura volgere più attenti la mente alla considerazione che segue.

## § 5.

### *Principio fondamentale sul valore de' Rotti veri.*

Dividete due tutti A e B in 10 parti eguali, e poi andate così scorrendo.

Se A è doppio di B, anche $\frac{1}{10}$ di A è doppio di $\frac{1}{10}$ di B.

Se A è triplo di B, anche $\frac{1}{10}$ di A è triplo di $\frac{1}{10}$ di B.

Se A è quadruplo di B, anche $\frac{1}{10}$ di A è quadruplo di $\frac{1}{10}$ di B.

*Viceversa*

Se A è doppio di B, $\frac{1}{10}$ di B è sudduplo ossia *due volte minore* di $\frac{1}{10}$ di A.

Se A è triplo di B, $\frac{1}{10}$ di B è suttriplo ossia *tre volte minore* di $\frac{1}{10}$ di A.

Se A è quadruplo di B, $\frac{1}{10}$ di B è suqquadruplo ossia *quattro volte minore* di $\frac{1}{10}$ di A.

Che però per formare $\frac{1}{10}$ di A doppio ci vogliono due parti decime di B sudduplo.

Sicchè $\frac{2}{10}$ di B sudduplo sono eguali ad $\frac{1}{10}$ di A duplo: $\frac{3}{10}$ di B suttriplo sono eguali ad $\frac{1}{10}$ di A triplo: $\frac{4}{10}$ di B suqquadruplo sono eguali ad $\frac{1}{10}$ di A quadruplo.

Ciò premesso, io considero il rotto $\frac{4}{10}$. Quì o divido *quattro*

*tutti* in 10 parti e lo dico *tutto quadruplo*: o divido un *solo tutto* in 10 parti eguali e lo dico *tutto suqquadruplo* per rispetto al primiero.

Ma che vuol dire, che un tutto è suqquadruplo ossia *quattro volte minore* di un altro? Vuol dire, che a formare un tutto quadruplo ci bisognano 4 tutti suqquadrupli. Così, che vuol dire, che una piastra è quadrupla di 3 carlini? vuol dire, che a formare una piastra ci bisognano *quattro volte* carlini 3.

Nel caso nostro dunque tanto è dividere quattro tutti, ossia un tutto quadruplo, in dieci parti decime e prenderne una sola, quanto dividere un sol tutto in dieci parti decime e prenderne quattro. Ma quadruplicare un tutto e dividerlo in dieci parti e prenderne una, porta seco una divisione formale, in cui 4 *numeratore* fa da dividendo, e 10 *denominatore* fa da divisore: il valore dunque del rotto si ha con dividere il numeratore pel denominatore e notarne il quoziente. Principio laonde fondamentale de' rotti si è « *Il valore del rotto vero è uguale al quoziente, che si ha dividendo il numeratore pel denominatore.*

### *Avvertimento primo.*

Qui si comprende l'esempio addotto da *Vito Caravelli*, quando nel considerare il valore di $\frac{11}{18}$ *di miglio*, dice tanto ottenersi di valore da un miglio diviso in 18, delle quali se ne prendono 11 *parti diciottesime*, quanto dal dividere 11 miglia in 18 parti eguali, dalle quali se ne prende *una parte diciottesima*. In fatti un miglio si dica A, undeci miglia si dicano B. Poichè B è undeci volte maggiore di A, una sola *parte diciottesima* di B equivale a undeci parti diciottesime di A. Che però allo stesso valore si perviene, siachè si divida il miglio in 18 parti, da cui se ne prendano 11, siachè si dividano 11 miglia in 18 parti, e da queste se ne prenda 1. Ma dividere 11 *tutti* in 18 parti è l'istesso che destinare il numeratore 11 a dividendo e 'l denominatore 18 a divisore « *dunque* » *il valore del rotto si ha con dividere il numeratore pel denomina-* « *tore* ».

### *Avvertimento secondo.*

Di tutti i rimanenti rotti, cioè *del rotto apparente*, *del rotto multiplo*, e *del rotto non multiplo*, dinotati nel § 2. di questo titolo, il valore si ha dal dividere il numeratore pel denominatore (§ 3.): del rotto vero si ha consimilmente il valore con dividere il numeratore pel denominatore (§ 5.): la condizione quindi è pari per tutti; ondecchè è giusto il dire universale degli aritmetici « *Il valore del rotto*

*si ha con dividere il numeratore pel denominatore* » Solo è da avvertire che il numeratore del rotto vero dinota tanti tutti, quante unità esso contiene: così il 4 numeratore di $\frac{4}{5}$ *di una piastra* dinota 4 piastre: e de' rotti $\frac{27}{10}$ *di un ducato*, $\frac{17}{10}$ di *una canna* etc. il 27 dinota 27 *ducati*, e il 17 dinota 17 *canne*.

*Avvertimento terzo.*

Badi il calcolatore a cavare ben subito le unità dal rotto spurio; così trovando $\frac{6}{4}$, riduca subito il rotto a forma vera col dividere il numeratore pel denominatore, e scrivere $\frac{6}{4}=1\frac{2}{4}$: $\frac{13}{3}=4\frac{1}{3}$: $\frac{25}{7}=3\frac{4}{7}$. Ciò dicesi *estrarre o ricavare gl'interi da' rotti.*

## § 6.

*Esercizii pratici sul valore de' rotti veri.*

$\frac{4}{5}$ di una piastra (*dividendo 4 piastre ossia 48 carlini per 5*)$=$9 *carlini* e $\frac{3}{5}$ *di un carlino* $=$9 carlini e grana 6.

$\frac{3}{7}$ di un ducato (*dividendo 3 ducati ossia 30 carlini per 7*)$=$4 carlini e $\frac{2}{7}=$4 carlini 2 grana e $\frac{6}{7}$ di un grano (a).

$\frac{5}{8}$ di un rotolo (*dividendo 5 rotoli ossia 165 once per 8*)$=$20 once e $\frac{5}{8}$.

$\frac{4}{7}$ di sette ore (*dividendo 4 ore ossia 240 minuti per 7*)$=$34 minuti e $\frac{2}{7}$ di un minuto.

$\frac{2}{8}$ di un tarì (*dividendo 2 tarì, ossia 40 grana per 8*)$=$grana 5.

$\frac{79}{9}$ di un giorno (*dividendo 79 giorni ossia ore 1896 per 9*)$=$210 ore, e $\frac{6}{9}$.

$\frac{9}{15}$ di 8 canne (*dividendo 9 di 8 canne ossia 9 di 64 palmi, ossia 576 palmi per 15*)$=$38 palmi e $\frac{6}{15}$ di un palmo.

## § 7.

*Lemmi alla prima trasformazione de' rotti.*

*Lemma 1. — Se di un rotto si moltiplichi solo il numeratore per un numero qualsifosse, il valore del novello rotto*

(a) Volendosi continuare il valore di $\frac{6}{7}$ di un grano, si riducano le 6 grana indicate dal numeratore in cavalli 72; e dividendosi questi per 7, daranno 10 cavalli e $\frac{2}{7}$; e poichè non si dà luogo ad ulteriore divisione, i $\frac{2}{7}$ di cavallo arrestano l'operazione.

*sarà tante volte accresciuto, quante volte lo dice il numero moltiplicatore.*

Sia il rotto $\frac{2}{3}$, di cui si moltiplichi il numeratore 2 per 2 la frase diverrà $\frac{4}{3}$, doppio il $\frac{2}{3}$. Il $\frac{4}{3}$ in fatti è $= \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$; ecco un duplicato valore. In pratica; $\frac{2}{3}$ *di una piastra* sarebbe equivalsa a carlini 8: aggiunti altri due terzi per la frase $\frac{4}{3}$ ossia altri carlini 8, si avrebbero carlini 16. Chi non conosce che carlini 16, valore di $\frac{4}{3}$, è doppio di carlini 8 valore di $\frac{2}{3}$?

Supponghiamo del rotto $\frac{2}{3}$ moltiplicato il numeratore 2 per 3: il rotto diverrà $\frac{6}{3}$. Questo sarà certamente uguale a $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$, frase che visibilmente è tripla di $\frac{2}{3}$. Ed in pratica; se $\frac{2}{3}$ *di una piastra* è uguale a carlini 8, certamente $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$ ossia $\frac{6}{3}$ sono uguali a carlini 8+8+8, ossia 24 carlini, triplo di 8.

Si ragioni così di qualunque altro numero, per cui si moltiplicasse sia $\frac{2}{3}$ sia qualunque altro rotto, e se ne conchiuderà come sopra « *che se di un rotto* ec.

*Esercizj pratici.*

$\frac{10}{18} \times 100 = \frac{1000}{18}$ di un valore centuplo di $\frac{10}{18}$.
$\frac{14}{40} \times 176 = \frac{2464}{40}$ due mila quattrocento sessantaquattro volte maggiore di $\frac{14}{40}$
$\frac{5}{8} \times 7 = \frac{35}{8}$ trentacinque volte maggiore di $\frac{5}{8}$.

*Lemma 2. — Se di un rotto si moltiplichi per un numero qualunque il solo denominatore, il suo valore sarà tante volte minore di quanto lo dice il numero moltiplicatore.*

Sia il rotto $\frac{2}{3}$ *di una piastra*, di cui si moltiplichi il solo denominatore 3 per 2, la frase diverrà $\frac{2}{6}$. Esprimendo il rotto $\frac{2}{3}$ *due terze parti di una piastra*; il suo valore, come si è detto, è uguale ad 8 carlini; il valore del secondo rotto $\frac{2}{6}$ (poichè ogni parte sesta è uguale a 2 carlini) non può essere che di carlini 4, cioè la metà del valore del primo rotto. Dal che ne sorge la regola seguente. *Se di un rotto si moltiplichi il solo denominatore per 2, il valore diventerà per metà ossia sudduplo.*

Così del dato rotto $\frac{2}{3}$ si moltiplichi il solo denominatore per 3: la frase diverrà $\frac{2}{9}$. Il suo valore ritrovato col *metodo artistico* (§ 4). ossia dividendo il 2 per 9, ossia 2 piastre per 9, è di grana 26 e cavalli 8, che sono la terza parte di carlini 8, cioè, $\frac{2}{9}$ è un terzo di $\frac{2}{3}$. Così si ragioni di ogni rotto, di cui il solo denominatore si moltiplichi per qualunque numero, e sorgerà a principio generale. *Se di un rotto si moltiplichi il solo denominatore per un nu-*

*mero qualunque, il suo valore sarà tante volte minore, di quanto lo dice il numero moltiplicatore.*

*Trasformazione 1. de' rotti.*

***Moltiplicando sì il numeratore, che il denominatore di un rotto per un medesimo numero non si altera il valore.***

Sia il rotto $\frac{2}{3}$ di cui moltiplico per 3 prima il numeratore 2, il suo valore sarà certamente *di un valore triplo* (*Lemma* 1. § 7.), si dirà $\frac{2}{3} \times 3 = \frac{6}{3}$ triplo di $\frac{2}{3}$.

Prendo di poi in mira questo rotto $\frac{6}{3}$, che si è detto di valore triplo di $\frac{2}{3}$, e ne moltiplico il solo denominatore 3 per 3, ne avrò $\frac{6}{9}$, che sarà certamente di un valore *suttriplo* di $\frac{6}{3}$, ossia *tre volte minore* di $\frac{6}{3}$ (*Lemma* 2.). Così quel $\frac{2}{3}$, che per la moltiplicazione del numeratore per 3 era divenuto di valore triplo, diventa per ragione contraria di valore suttriplo ossia tre volte minore, per essersi moltiplicato anche il denominatore per 3: perlocchè è ritornato al medesimo valore. In simil guisa, se uno per forza impellente è obbligato a dare tre passi innanti, e per forza retropulsiva è riastretto a ritornare tre passi indietro, si riporrà certamente nel medesimo luogo che prima, e si dirà di non aver mutato condizione.

## § 8.

*Lemmi alla trasformazione 2. de' rotti.*

*Lemma 1. — Ogni rotto, di cui si divide il solo numeratore per qualunque numero, diventerà di un valore tante volte più piccolo, quante lo dice il numero divisore.* Sia il rotto $\frac{6}{3}$ di cui divido solo il numeratore 6 per 3. La sua frase diverrà $\frac{2}{3}$, e chi non vede che, $\frac{2}{3}$ è minore tre volte di $\frac{6}{3}$? Decomponiamo infatti $\frac{6}{3}$ in parti uguali a $\frac{2}{3}$, e si troverà ch'esso è uguale a $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$: e $\frac{2}{3}$ è sempre la terza parte di $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$. Da che ne siegue la regola generale « *Ogni rotto* ec.

*Lemma 2.—Se di un rotto si divide il denominatore per qualunque numero, il suo valore si accrescerà di tanto, di quanto lo dirà il numero divisore.*

Sia il rotto $\frac{3}{12}$ di una piastra, di cui si divida *il solo denominatore* 12 *per* 3; *la frase diverrà uguale a* $\frac{3}{4}$. Il primo rotto era uguale a 3 diviso per 12 (§ 5.), talchè 3 era dividendo e 12 era divisore, secondo il metodo artistico. Ma il divisore del rotto $\frac{3}{4}$ è

divenuto 3 volte minore, perchè 4 è suttriplo di 12, dunque è valore espresso dal rotto $\frac{3}{4}$ deve essere tre volte maggiore di quello, che dinotava $\frac{3}{12}$. Chi non sa in effetti che quanto più diminuisce il divisore, tanto più accresce il quoziente? In fatti $\frac{3}{12}$ = *tre carlini*, e $\frac{3}{4}$ = 9 carlini.

*Trasformazione 2. de' rotti.*

***Dividendo sì il numeratore che il denominatore di un rotto per un medesimo numero, non si altera il valore.***

Sia il rotto $\frac{6}{18}$ di un tutto: io divido il solo denominatore 18 per 3. Il suo valore sarà certamente triplo (*Lemma* 2. *antec.* § 8.) e la sua frase sarà $\frac{6}{6}$ triplo di $\frac{6}{18}$.

Prendo ora di mira questo rotto $\frac{6}{6}$, che si è detto di valore triplo di $\frac{6}{18}$, e ne divido il solo numeratore 6 per 3, ne avrò la frase $\frac{2}{6}$, la quale sarà certamente di un valore suttriplo di $\frac{6}{6}$ (*Lemma 1.* § 8.); sicchè dell'istesso $\frac{6}{6}$ è tre volte minore il rotto $\frac{6}{18}$, ed è tre volte minore anche il rotto $\frac{2}{6}$: dunque $\frac{6}{18} = \frac{2}{6}$. E quel rotto $\frac{6}{18}$, che per la divisione del solo denominatore per 3 era divenuto di un valore triplo, quando si divide il solo numeratore per 3 diventa per ragion contraria di valore suttriplo. Nella guisa che se uno per forza impellente è obbligato a dar tre passi avanti, e per una forza retropulsiva è obbligato a dar tre passi indietro, ritornerà certamente nel medesimo luogo che prima, e si dirà di non aver mutato condizione. Dal che ne siegue il secondo teorema fondamentale. ***Se si divide sì il denominatore che il numeratore di un rotto per uno stesso numero, non si altera il valore.***

## § 9.

*Applicazione de' su riferiti principii per tutt' i casi che possono occorrere nel calcolo de' rotti.*

Premesse tali verità, si può dar luogo a varie trasformazioni senza che le frasi perdano di valore come ne' casi che sieguono.

*Applicazione 1.* — ***Ridurre un numero intero a rotto senza che muti di valore.*** Sottoscrivete all'intero l'unità: così $4 = \frac{4}{1}$. E la ragione? si desume dal teorema fondamentale (§ 5. tit. 2.). Diceva questo, che il valore del rotto si ha con dividere il numeratore

pel denominatore: or dividendo un numero per 1, si riproduce novellamente l'istesso numero nel quoziente; dunque il 4 ha subito, sì, una forma frazionaria, ma non è discapitato di valore.

*Applicazione* 2. — *Ridurre un intero a rotto, ma con determinato denominatore, senza che muti menomamente di valore.*

Sia l'intero 4, che si voglia ridurre a forma frazionaria, ma che abbia un determinato denominatore 5. Si riduca il 4 in forma frazionaria a norma dell'*applicazione antecedente:* diverrà uguale a $\frac{4}{1}$. Si moltiplichi di tale rotto $\frac{4}{1}$ sì il numeratore che il denominatore per 5, e la frase sarà $\frac{20}{5}$ dello stesso valore che $\frac{4}{1}$ (§ 7. *trasfor. 1*) ossia $= 4$. Volendosi abbreviare l'operazione « *si moltiplichi il numero dato pel denominatore dato: al prodotto, che farà da numeratore, si sottoscriva l'intero dato denominatore.* Così si avrebbe $\frac{4\times5}{5} = 4$ *a cui si voleva dare il denominatore* 5.

*Applicazione* 3. — *Ridurre più rotti di diverso denominatore a rotti dello stesso denominatore, senza alterarsi menomamente il valore.*

Sieno i due rotti $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{6}$. Io moltiplico sì il 3 che il 4 del primo rotto per 6, denominatore del secondo rotto, e ne avrò la frase $\frac{18}{24}$, la quale è dello stesso valore di $\frac{3}{4}$ (§. 7. *trasfor.* 1.). Indi moltiplico sì il numeratore 5 che il denominatore 6 del secondo rotto pel denominatore del primo e ne avrò $\frac{20}{24}$ dell'istesso valore che $\frac{5}{6}$ (§ 7. *trasfor. 1.* ). Sicchè i due rotti $\frac{18}{24}$ e $\frac{20}{24}$ saranno dello stesso valore de' rotti primitivi $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{6}$, col vantaggio però di avere lo stesso denominatore 24.

Sieno i tre rotti $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{5}$. Moltiplico sì il 3 che il 4 *del primo rotto* per 6, ed il loro prodotto per 5, e ne avrò $\frac{3\times6\times5}{4\times6\times5} = \frac{90}{120}$. Moltiplico sì il 2, che il 6 *del secondo rotto* per 4, ed il loro prodotto per 5, e ne avrò $\frac{2\times4\times5}{6\times4\times5} = \frac{40}{120}$. Moltiplico finalmente sì il 4 che il 5 *del terzo rotto* per 6, ed il loro prodotto per 4, e ne avrò $\frac{4\times4\times6}{5\times4\times6} = \frac{96}{120}$ e dirò che $\frac{90}{120}$, $\frac{40}{120}$, $\frac{96}{120}$ sono dello stesso denominatore, ed equivalenti ai rotti $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{5}$. Così di ogni altra serie di rotti. Onde regola generale si è « *si moltiplichi sì il numeratore, che il denominatore di ciascun rotto per tutti i denominatori degli altri, e ne sorgeranno rotti equivalenti per la ragione addotta* § 7. *trasformazione 1.* Vi sono però due casi, ne' quali l'operazione potrà abbreviarsi.

*Caso* 1. — Sieno i rotti $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{9}$; ne' quali il denominatore 3 è esatto divisore dell'altro denominatore 9. Si moltiplichino per 3, *quoziente di* 9 *diviso per* 3, i termini di $\frac{2}{3}$, e si avranno i rotti $\frac{6}{9}$ e $\frac{5}{9}$ dell'istesso denominatore, ma dall'istesso valore de' rotti $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{9}$.

*Caso* 2.—Sieno i tre rotti $\frac{5}{6}$ $\frac{9}{10}$ $\frac{8}{30}$, i cui denominatori sono

divisori e dividendi esatti fra di loro. Colle regole esposte io moltiplico i termini di $\frac{3}{5}$ per 6, *quoziente di* 30 *per* 5, e ne avrò $\frac{18}{30}$ : poi moltiplico i termini di $\frac{2}{10}$ per 3, *quoziente per* 30 *diviso per* 10, e ne avrò $\frac{6}{30}$, ed i rotti $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{5}{30}$ equivaleranno ad $\frac{18}{30}$ $\frac{6}{30}$ $\frac{5}{30}$ ( § 7. *trasfor. 1.*).

*Applicazione 4.—Riunire in un sol rotto un intero ed un rotto senza che discapitino di valore.*

Sia la frase 4 e $\frac{2}{3}$, come ridurlo ad un sol rotto senza che perda menomamente di valore? Si riduca il 4 in forma frazionaria, e sarà uguale a $\frac{4}{1}$ ( *Applicazione 1.*). Si moltiplichi sì il numeratore, che il denominatore di $\frac{4}{1}$ per 3, e se ne avrà il rotto $\frac{12}{3}$. Or 12 *parti terze* più 2 *parti terze* non equivalgono a 14 *parti terze*, ossia a $\frac{14}{3}$? Si osservi dunque l' andamento della cosa, e si dirà che volendosi un intero e rotto ridurre ad un sol rotto senza che perdano menomamente di valore, si riduca l'intiero a rotto, e poi ambedue i rotti al medesimo denominatore, e se ne riuniscano i soli numeratori, sottoscrivendosi il denominatore comune: così 4 e $\frac{3}{4} = \frac{4}{1}$ $\frac{3}{4} = \frac{16}{4} + \frac{3}{4} = \frac{19}{4}$. Altri ricorrono al seguente metodo pratico. Si moltiplichi l'intero pel denominatore: si aggiunga al suo prodotto il numeratore del rotto, e si sottoscriva il denominatore: così nella frase proposta $4 \times 4 + 3$ a cui va sottoscritto il 4, scrivendosi $\frac{19}{4}$.

*Applicazione 5. — Scaricare gl' intieri ne' rotti, senza che perdano di valore.*

Avviene sovente nel calcolo de'rotti che l'operazione non si può eseguire sopra una frase di poco valore per rispetto all'uso che converrebbe. Si suole allora rafforzare la frase collo staccare un'unità dall' intero e ridurla a rotto apparente dell'istesso denominatore del rotto dato, e poi riunire i due rotti fra lui. Sia la frase 4 e $\frac{2}{3}$; essa si potrà risolvere in $3 + 1 + \frac{2}{3}$ ossia $3 + \frac{3}{3} + \frac{2}{3}$ ossia in $3 \frac{5}{3}$. Così quell'operazione che non era eseguibile sopra $\frac{2}{3}$ lo sarà sulla frase maggiore $\frac{5}{3}$, mentrecchè la primiera $4 \frac{2}{3}$ non ha sofferto discapito veruno. Ciò si dice *scaricare intieri ne' rotti senza perdere di valore.* Che poi 1 sia uguale a $\frac{3}{3}$ apparisce dalla natura del rotto apparente ( § 3. *tit. 4.* )

*Applicazione 6. — Ridurre i rotti a minimi termini.*

Volete voi ridurre un rotto molto ampio in uno più ristretto, senza che perda di valore? Trovate il *massimo divisore comune* del numeratore e denominatore, ed effettuite su ambedue la divisione. Così $\frac{18}{27}$ può ridursi a $\frac{2}{3}$, poichè si può supporre diviso sì il numeratore che il denominatore per 9. Così $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ dividendosi sì il 5 che il 15 per 5. Ciò dicesi dagli Aritmetici *ridurre a minimi termini.*

Ma come trovare il *massimo divisore comune* al numeratore ed

al denominatore? Il metodo si è dettato nel § 26 tit. 3. che consiste nel dividere il denominatore come più grande pel numeratore, che è sempre più piccolo, e notarne il residuo; indi questo residuo farlo divisore, ed il divisore antecedente prender luogo di dividendo, e così proseguire, sino a che si sarà trovato un divisore, che divida esattamente il dividendo. Ciò fu ampiamente dimostrato nella ricerca del massimo comun divisore. Ora non resta che suggellarlo colla pratica.

Sia il rotto $\frac{48}{186}$. Si divida 186 per 48, e si noti il residuo 42. Questo residuo faccia da divisore e divida 48. Il secondo residuo 6 faccia da divisore, e divida 42. E poichè 6 divide esattamente 42 sarà massimo comune divisore del numeratore e del denominatore del rotto $\frac{48}{186}$ (§ 20 *tit.* 3). Trovato 6 massimo comune divisore si divida per esso sì il 48 che il 186 e ne nascera la frase $\frac{8}{31}$ (§ 8. *trasfor.* 2.) uguale alla primiera $\frac{48}{186}$.

Così $\frac{188}{1896}$ (*massimo comune divisore* 4) $= \frac{47}{474}$

$\frac{75}{100}$ (*massimo comune divisore* 25) $= \frac{3}{4}$

## § 10.

### *Vantaggi del comune denominatore.*

1. Questo metodo di ridurre varî rotti allo stesso denominatore è interessante in Aritmetica, poichè riducendosi allo stesso denominatore, le grandezze vengono ad essere divise in parti simili ed eguali, e ciò giova molto alle mente di chi calcola. Dandosi in effetti molti rotti, quanta pena non costerebbe allo spirito il supporre una stessa quautità divisa in 8 parti nel primo rotto, in 12 nel secondo, in 29 nel terzo etc.?

2. Questo metodo di ridurre i rotti allo stesso denominatore, ossia in parti eguali e simili, giova anche a tenere in una sola frase tutte le parti espresse da' diversi rotti. Imperciocchè qual fastidio non sarebbe tenere a memoria $\frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{1}{9}$ in vece di dire $\frac{6}{9}$? Appunto come non sarebbe più giovevole il dire 6 *grana*, che 2 *grana* + 3 *grana* + 1 *grano*? Data quindi qualunque serie di rotti che abbiano il medesimo denominatore, si possono riunire in un sol rotto col riunire tutti i numeratori, e col sottoscriversi il denominatore, solo per dinotare che specie di parti siano: così $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{9}{5}$, e come rotto spurio $= 1\ \frac{4}{5}$ (*Avv.* 3 § 5).

*Avvertimento.* Questa operazione, oltre de' diversi usi, serve a conoscere, chi è più grande de' rotti della medesima specie, come nel seguente esempio.

Tizio in un dato tempo ha consumato $\frac{3}{4}$ di un tomolo di frumento, e Caio $\frac{2}{5}$; si cerca sapere chi de' due ne ha consumato di più?

Riducete i rotti $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{5}$ alla medesima denominazione ed avrete gli equivalenti $\frac{15}{20}$, $\frac{8}{20}$; dal che rileverete che il primo ha consumato 15 parti *ventesime* di un tomolo, ed il secondo 8 parti *ventesime*, ossia che Tizio ha consumato 7 parti *ventesime* più che Caio.

## § 11.

### *Dati più rotti sommarli insieme.*

Varii casi possono darsi.

1. O i rotti hanno lo stesso denominatore, ed allora giovandoci della riflessione seconda antecedente, basterà riunire i numeratori in un sol numeratore e sottoscrivere il denominatore comune.

2. O i denominatori sono diversi, ed allora si riducano prima alla stessa denominazione, e poi si continui l'operazione nel modo indicato.

3. O vi saranno intieri e rotti, ed allora si separino i rotti, e se ne faccia somma e calcolo diverso, e se mai ne risulti qualche rotto spurio, se ne ricavino le unità, e si aggiungano alla somma degl'intieri.

#### *Caso 1.*

1. *Sieno i rotti* $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+\frac{4}{5}$. Si uniscano i numeratori 3, 2, 4=9, sotto il 9 si apponga il 5, ed il rotto diverrà $\frac{9}{5}$. Ma siccome questo è rotto spurio, per avere il numeratore maggiore del denominatore, se ne ricavino gl'intieri col dividere il numeratore 9 pel denominatore 5 (§ 5. *Avver.* 3.), e se ne avrà 1 intiero e $\frac{4}{5}$, ossia 1 $\frac{4}{5}$.

#### *Caso 2.*

2. *Sieno i rotti* $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$. Si riducano all'istesso denominatore (§ 9. *appl.* 3) $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{24}{60}$. Indi sommino 40+45+24=109, a cui sottoscritto il denominatore comune 60, si avrà per somma il rotto $\frac{109}{60}$. Essendo questo rotto spurio, si divida 109 per 60 ed il rotto si ridurrà 1 $\frac{48}{60}$, che ridotto a *minimi termini* (§ 9 *applic.* 6) sarà uguale a $\frac{4}{5}$.

*Caso 3.*

3. *Sieno da sommarsi* $4\frac{3}{6}$, $5\frac{3}{4}$, $6\frac{6}{8}$. Si sommino prima $\frac{3}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8} = \frac{48}{96}$, $\frac{72}{96}$, $\frac{72}{96} = \frac{192}{96}$, che come rotto spurio è $= 2\frac{16}{96}$; indi si sommino gl'intieri, che sono uguali a 15, ed aggiungendosi i 2 ricavati dal rotto antecedente, diverranno $= 17\frac{16}{96}$. Questo rotto riducendolo a minimi termini sarà $= \frac{1}{6}$. La loro somma adunque è 17 intieri e $\frac{1}{6}$.

## § 12.

*Sottrarre un rotto da un altro.*

La sottrazione è un'operazione contraria all'addizione, mentre nella prima si toglie, nella seconda si aggiunge. Per sottrarre però rotto da rotto, è necessario che le parti da sottrarsi sieno consimilissime alle sottraende; ciò che non potrà avvenire se prima non si riducano allo stesso denominatore; che però si danno i cinque casi seguenti.

*Caso 1.*

O i denominatori sono medesimi, ed allora sottraete i numeratori, ed ad indicare di quale specie sieno le sottratte, scriveteci sotto il denominatore; così $\frac{6}{8} - \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$; $\frac{6}{8} - \frac{2}{8} = \frac{4}{8}$; $\frac{300}{648} - \frac{60}{648} = \frac{240}{648}$, e diviso per 8 sì il numeratore che il denominatore $= \frac{30}{81}$.

*Caso 2.*

Se i denominatori sono diversi, si similizzino col ridurli alla stessa denominazione secondo il metodo indicato (§ 9. *applic.* 3.°); poi si sottraggano fra loro. Così $\frac{2}{3} - \frac{3}{5}$ ridotti allo stesso denominatore diventano $= \frac{10}{15} - \frac{9}{15} = \frac{1}{15}$.

*Caso 3.*

Se da un intero si voglia sottrarre un rotto, come *da* 4 *sottrarre* $\frac{2}{3}$; si scarichi il 4 e si riduca a $3 + \frac{3}{3}$ (§ 9. *appl.* 5), ed allora in vece di dire $4 - \frac{2}{3}$, si dica $3 + \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = 3$ e $\frac{1}{3}$.

*Caso 4.*

Sieno interi e rotti da sottrarsi da interi e rotti, come $4\frac{2}{5}$ da *sottrarsi* da 7 e $\frac{4}{5}$. Allora si sottraggano prima i rotti e poi gli interi, e poichè $\frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$, e $7 - 4 = 3$, dunque $7\frac{4}{5} - 4\frac{2}{5} = 3\frac{2}{5}$.

Così 48 $\frac{18}{63}$ — 16 $\frac{3}{63}$ = 32 $\frac{15}{63}$, e dividendo sì il numeratore che il denominatore per 3, sarà uguale a 32 $\frac{5}{21}$.

*Caso 5.*

5. Se poi i denominatori fossero diversi, prima si similizzino, e poi si esegua la sottrazione; così sia la frase 7 $\frac{4}{5}$—4 $\frac{1}{3}$, similizzando i rotti, diverrà 7 $\frac{12}{15}$ — 4 $\frac{5}{15}$ e poichè $\frac{12}{15}$ — $\frac{5}{15}$ = $\frac{7}{15}$ e 7 — 4 = 3, così il residuo sarà 3 $\frac{7}{15}$.

Finalmente possono darsi rotti ed interi, ma mentre gl'interi sono capaci di sottraimento, non lo sono però i rotti, per essere l'uno minore di quello, da cui dovrebbe sottrarsi. Così da 7 e $\frac{2}{5}$ non si può a prima vista togliere 3 e $\frac{4}{5}$; poichè andando a sottrarre il numeratore 4 dall'altro numeratore 2 se ne scorgerebbe la impossibilità. Come fare allora? Si discarichi l'intiero antecedente nel rotto minore (§ 9. *appl.* 5). Così il 7 e $\frac{2}{5}$ si riduca in 6 + $\frac{5}{5}$ + $\frac{2}{5}$ ossia 7 $\frac{7}{5}$. Or quella sottrazione che non poteva eseguirsi da 7 e $\frac{2}{5}$ sarà facilissimamente eseguita sopra 6 e $\frac{7}{5}$ e si dirà $\frac{7}{5}$ — $\frac{4}{5}$ = $\frac{3}{5}$, 6—3=3; dunque 7 $\frac{2}{5}$ — 3 $\frac{4}{5}$ =3 e $\frac{3}{5}$.

Si operi così se i rotti fossero di diverso denominatore, e dopo di essersi similizzati si scorgesse che il rotto primiero fosse minore del secondo da sottrarsi. Così da 13 $\frac{1}{5}$ si voglia togliere 5 $\frac{1}{4}$. Similizzati i rotti, la frase diverrà 13 $\frac{8}{40}$ — 5 $\frac{10}{40}$. Or come da $\frac{8}{40}$ togliere $\frac{10}{40}$? Si ricorra al consueto mezzo, sciogliendo 13 in 12+1, e questo 1 in $\frac{40}{40}$, ed allora la frase diverrà 12+$\frac{40}{40}$+$\frac{8}{40}$—5 e $\frac{10}{40}$=12 e $\frac{48}{40}$ —5 $\frac{10}{40}$, ed ecco eseguibile l'operazione, che darà per residuo 7 e $\frac{38}{40}$. Quale rotto, se vorrà dividersi per 2 sì il numeratore che il denominatore, sarà in frase più breve espresso da $\frac{19}{20}$.

## § 13.

### *Moltiplicare i rotti.*

Gli Aritmetici nel moltiplicare i rotti, moltiplicano numeratore per numeratore e denominatore per denominatore. Così $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ = $\frac{2\times4}{3\times5}$ = $\frac{8}{15}$. Dimandati della ragione di tal procedimento ricorrono a due dimostrazioni che sieguono:

*Dimostrazione 1.* — Risovvenitevi, o giovanetti, che nella moltiplicazione il moltiplicando si ripete tante volte, quante unità contiene ilmoltiplicatore; così moltiplicando 30 per 7=210, il 30 è ripetuto 7 volte. Ma il 7 istesso non è stato che la ripe-

tizione di 1 eseguita sette volte; dunque ad avere un prodotto si deve eseguire sul moltiplicando quella stessa repetizione ed operazione, che si è eseguita sul moltiplicatore; colla differenza che nel moltiplicatore l' elemento da ripetersi è stato l' unità, ma ad avere il prodotto 210 l' elemento da ripetersi è stato il 30.

Or sia il rotto $\frac{3}{4}$ da moltiplicarsi per $\frac{5}{6}$: di cui si chiede il prodotto. Ad ottenere tal prodotto, come dicemmo, bisogna eseguire sul moltiplicando la stessa operazione, che si è eseguita sul moltiplicatore: cioè, ad avere il prodotto di $\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}$, bisogna eseguire sul moltiplicando $\frac{3}{4}$ ciò che fu eseguito sul moltiplicatore $\frac{5}{6}$. Ma che è avvenuto in $\frac{5}{6}$? Si è diviso il tutto in 6 parti eguali, e di queste parti seste se ne sono prese 5. Le operazioni sono state due 1. divisione del tutto in 6 parti eguali: 2. prendimento di 5 parti seste. Applichiamo le medesime operazioni sul moltiplicando $\frac{3}{4}$. Si divida prima in 6 parti eguali: e come ciò? Con moltiplicare il denominatore 4 per 6 (§ 7. *lemma* 2, *trasformazione* 1.): il rotto $\frac{3}{24}$ diverrà la sesta parte del rotto $\frac{3}{4}$. Si esiegua poi la seconda operazione, ossia di prender 5 volte questa sesta parte, e come ciò? Con moltiplicare il numeratore di $\frac{3}{24}$ per 5 (§ 7. *lemma* 1. *trasformazione* 1), ed averne $\frac{15}{24}$. Ecco il vero prodotto. Or si rifletta su i termini di $\frac{15}{24}$, e su quelli di $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{6}$; ognun vede che il numeratore 15 è surto dal moltiplicatore 3 per 5, ed il denominatore 24 dal moltiplicare 4 per 6, ossia dal *moltiplicare numeratore per numeratore e denominatore per denominatore.* Dandosi dunque a moltiplicare rotti fra loro, l' Aritmetico del prodotto de' numeratori ne faccia un solo numeratore, e del prodotto de' denominatori ne faccia un solo denominatore; e questo terzo rotto, che ne nascerà, sarà il vero prodotto richiesto. Così $\frac{3}{5}\times\frac{6}{8}=\frac{18}{40}$, e $\frac{5}{6}\times\frac{7}{9}=\frac{35}{54}$.

*Dimostrazione* 2. — Questa dimostrazione è surta dal considerare il rotto $\frac{5}{6}$ nella forma naturale; ossia dal considerare un tutto diviso in 6 parti da cui se ne prelevano 5. Ma se consideriamo il $\frac{5}{6}$ sotto la forma artistica (§ 5.), *ossia che* 5 *tutti si dividano in 6 parti, e se ne prelevi una sola*, ne sorgerà una dimostrazione più ingegnosa, che non sarà discara a voi discenti.

Consideriamo in fatti il rotto $\frac{5}{6}$ nella forma seconda *artistica.* Che vuol dir $\frac{5}{6}$? Vuol dire 5 tutti divisi in 6 parti, dalle quali se ne preleva una. Ogni sesta parte dunque di 5 è sussestupla, ossia 6 *volte minore di* 5, e viceversa 5 è sestuplo di questa sesta parte espressa di $\frac{5}{6}$. In generale 5 è sestuplo di $\frac{5}{6}$, come 3 è quadruplo del valore di $\frac{3}{4}$, ed 8 è nonuplo del valor di $\frac{8}{9}$. Ciò premesso se $\frac{3}{4}$ si moltiplicasse per 5 il rotto diverrebbe $\frac{15}{4}$ (§ 7. *lemma* 1). Ma questo sarebbe un prodotto falso, perchè voi dovevate moltiplicare $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{6}$ che è susse-

stuplo di 3, non già per 5 che è sestuplo di $\frac{5}{6}$. Voi moltiplicando $\frac{3}{4}$ per un numero sestuplo, avete sestuplicato il prodotto e $\frac{15}{4}$ è sei volta più grande del vero prodotto. A correggere l'errore, convien che $\frac{15}{4}$ divenisse 6 volte minore. Ma non può divenir 6 volte minore se non si moltiplica il denominatore per 6 (§ 7 *lemma* 2) dunque il vero prodotto sarà $\frac{15}{4 \times 6}$ ossia $\frac{15}{24}$. Ma $\frac{15}{24}$ nasce dal moltiplicare 3 per 5 e 4 per 6, ossia numeratore per numeratore e denominatore per denominatore: dunque la moltiplica delle frazioni si ha *dal moltiplicare numeratore per numeratore e denominatore per denominatore.* — Possono intanto darsi i casi seguenti.

*Caso 1.*

*Moltiplicare un rotto per intero.*

Si moltiplichi il numeratore pel dato intero: così dovendosi moltiplicare $\frac{3}{4}$ per 5, si moltiplichi solo il numeratore 3 per 5, il rotto diverrà $\frac{15}{4}$. Imperciocchè che cosa è moltiplicare la frazione per l'intero, se non se ripetere tante volte la frazione, quante volte lo dice l'intero? Il rotto quindi $\frac{3}{4}$ moltiplicato per 5 equivale a $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4} =$ ossia (§ 11.) $\frac{15}{4}$.

In altri termini cosa è moltiplicare $\frac{3}{4}$ per 5, se non accrescere 5 volte il valore di $\frac{3}{4}$? E come si accresce di un dato numero di volte il valore del rotto, se non con moltiplicare il numeratore per l'istesso numero? Ciò fu ampiamente notato (§ 7. *lemma* 1).

*Caso 2.*

*Moltiplicare un intero per un rotto.*

Viceversa: se converrà moltiplicare un intero per una frazione, il metodo sarà lo stesso, 1.° perchè $\frac{3}{4}$ moltiplicato per 5 è lo stesso che 5 moltiplicato per $\frac{3}{4}$. (*Teorema* 1. *tit.* 4.) 2.° perchè se all'intero si sottoscrivesse l'unità, la frase diverrebbe $\frac{5}{1}$ moltiplicato per $\frac{3}{4}$, ed il prodotto sarebbe anche $\frac{15}{4}$, come dalla regola cennata.

*Caso 3.*

*Moltiplicare interi e rotti per interi e rotti.*

Si riduca ogn'intero e rotto ad un sol rotto (§ 9 *applic.* 4). Così dato 4 $\frac{2}{5}$ da moltiplicarsi 5 $\frac{2}{9}$: il primo diventi $\frac{22}{5}$; il secondo $\frac{47}{9}$, e si avrà $\frac{22 \times 47}{5 \times 9} = \frac{564}{45}$ e come rotto spurio $= 12\ \frac{14}{45}$.

## § 14.

*Dividere i rotti fra loro.*

Si capovolga il rotto divisore, passando cioè il numeratore per denominatore ed il denominatore pel numeratore, e poi

si moltiplichino come nel caso precedente. Sia il rotto $\frac{3}{4}$ da dividersi pel rotto $\frac{5}{6}$: si capovolga il divisore $\frac{5}{6}$ facendolo diventare $\frac{6}{5}$; si moltiplichi poi $\frac{3}{4}$ per $\frac{6}{5}$, moltiplicando cioè il numeratore pel numeratore ed il denominatore pel denominatore, ed il quoziente sarà $\frac{18}{20}$.

La dimostrazione che si adduce dagli Aritmetici è la seguente.

Se è da dividersi $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{9}$, vale lo stesso che dividere $\frac{3}{4}$ per lo valore di $\frac{5}{9}$ ossia per la nona parte di 5 ( § 5. *tit.* 4 ).

Ma che vuol dire dividere $\frac{3}{4}$ per la nona parte di 5? Vuol dire che prima bisogna sapere a chi è uguale $\frac{3}{4}$ diviso per 5 e poi bisogna prenderne la nona parte. Or dividere $\frac{3}{4}$ per 5 vuol dire abbassare $\frac{3}{4}$ ad un valore sucquintuplo, ossia cinque volte minore. Ma come si abbasserà $\frac{3}{4}$ ad un valore sucquintuplo? Con moltiplicare il denominatore 4 per 5; talchè $\frac{3}{4}$ diviso per 5 da $\frac{3}{4 \times 5} = \frac{3}{20}$ (§ 7. *lemma* 2.) e questo è il chiesto quoziente. Ma io non dovea dividere $\frac{3}{4}$ per 5, ma $\frac{3}{4}$ per la nona parte di 5, ossia per un numero 9 volte più piccolo di 5. Or se un divisore è sunnonuplo di un altro: ragion vuole che il quoziente sia nonuplo. Se dunque $\frac{3}{4}$ diviso per 5 ha dato per quoziente $\frac{3}{20}$; dividendolo per la nona parte di 5, dovrà avere un quoziente nonuplo di $\frac{3}{20}$, e per aver ciò, basterà elevare il $\frac{3}{20}$ ad un stato nonuplo. Ma come si rende un rotto nonuplo di se stesso? Con moltiplicare il numeratore 3 per 9, ( § 7. *lemma* 1. ) ed averne $\frac{27}{20}$. Ecco il quoziente di $\frac{3}{4}$ diviso per $\frac{5}{9}$. Ora analizziamo questo $\frac{27}{20}$. Se il divisore $\frac{5}{9}$ si fosse capovolto in $\frac{9}{5}$, e poi si fosse moltiplicato numeratore per numeratore e denominatore per denominatore, si sarebbe parimenti ottenuto $\frac{27}{20}$. Dunque così facendo, rettamente l'operazione si esegue.

Due casi intanto, oltre l'accennato, possono darsi o vuolsi 1.° dividere un rotto per un intero, 2.° o dividere rotti frammisti ad interi, 3.° o i due rotti hanno l'istesso denominatore.

### Caso 1.

*Sia da dividersi* $\frac{5}{9}$ per 3; si moltiplichi il denominatore 9 per 3, restando intatto il numeratore ed il quoziente sarà $\frac{5}{27}$, imperciochè, come più volte si è detto e giova qui ripetere, dividere $\frac{5}{9}$ per 3 vuol dire abbassare $\frac{5}{9}$ ad un valore 3 volte minore; ma non si abbassa un rotto ad un valore 3 volte minore, se non moltiplicando il denominatore per 3, ( § 7. *lemma* 2. ) dunque $\frac{5}{9}$ diviso per 3 dovrà essere uguale a $\frac{5}{9 \times 3} = \frac{5}{27}$. Se viceversa converrà dividere 3 per $\frac{5}{9}$, la frase diverrà $\frac{3}{1}$ diviso per $\frac{5}{9}$ e capovolto il divisore sarà $\frac{3}{1} \times \frac{9}{5} = \frac{27}{5}$.

*Caso* 2.

*Sia da dividersi* $4\frac{[illegible]}{5}$ per $3\frac{[illegible]}{6}$. Poichè il rotto $4\frac{[illegible]}{5}$ ridotto ad un solo rotto $= \frac{[illegible]}{5}$ (§ 9. *applicaz.* 4) e $3\frac{[illegible]}{6} = \frac{[illegible]}{6}$, così si divida il rotto $\frac{[illegible]}{5}$ per $\frac{[illegible]}{6}$: ossia si capovolga $\frac{[illegible]}{6}$ in $\frac{6}{[illegible]}$ e si moltiplichi per $\frac{[illegible]}{5}$, e la frase diverrà $\frac{[illegible]}{5} \times \frac{6}{[illegible]} = \frac{[illegible]}{[illegible]}$ (§ 13.) $= \frac{[illegible]}{[illegible]} = \frac{[illegible]}{[illegible]}$.

*Caso* 3.

Sieno i rotti $\frac{5}{20}$ ed $\frac{8}{20}$, che abbiano l'istesso denominatore 20: il quoziente sarà il numeratore 5 diviso pel numeratore 8 ossia il rotto $\frac{5}{8}$. Si esiegua in fatti l'operazione secondo il metodo ordinario col capovolgere il divisore, e $\frac{5}{20} : \frac{8}{20} = \frac{5}{20} \times \frac{20}{8}$. Togliendo 20 moltiplicatore comune sì al numeratore che al divisore, resterà il rotto $\frac{5}{8}$. E che altro è questa soppressione di 20, che dividere sì il numeratore che il denominatore per 20 ed averne il rotto $\frac{5}{8}$?

## § 15.

*Ritrovare il valore di un rotto di rotto.*

Spesso non è un tutto, che si divide, dalle cui parti è necessità che se ne prendano alcune: alcune volte si debbono prendere parti, non da un intiero diviso, ma da parti dell'intiero. Così sia il rotto $\frac{3}{4}$ di un ducato, uguale in valore a grana 75. Si vogliono prendere $\frac{2}{6}$ non dal ducato, ma da grana 75, ossia si vogliono $\frac{2}{6}$ di $\frac{3}{4}$. Ciò dicesi *rotto di rotto*. Se poi si volesse $\frac{2}{9}$ di $\frac{2}{6}$ di $\frac{3}{4}$, allora si direbbe *rotto di rotto di rotto*. Occupiamoci a ritrovare il valore del *rotto di rotto*. Noi su ciò troveremo ripetuto il procedimento e la dimostrazione della moltiplicazione (§ 13.).

Sia $\frac{2}{6}$ di $\frac{3}{4}$. Quivi l'operazione riducesi ad abbassare il rotto $\frac{3}{4}$ ad un valore che sia un sesto di 2, secondo il *metodo artistico* (§ 5.). Sicchè prima bisogna sapere a chi è uguale $\frac{3}{4}$ preso due volte, e poi abbassarlo sei volte. Or come si riduce $\frac{3}{4}$ ad un valore preso 2 volte? Col moltiplicare il numeratore 3 per 2 (§ 7. *Lemma* 1.) ed averne $\frac{6}{4}$. E come si abbassa quest'ultimo ad un valore sei volte minore? Col moltiplicare il denominatore per 6 ed averne il rotto $\frac{6}{24}$ (§ 7 *lemma* 2.). Ma questo nasce dal moltiplicare il 2 per 3 e 6 per 4, cioè numeratore per numeratore, e denominatore per denominatore; dunque etc.

Così *il rotto di rotto* $\frac{1}{7}$ di $\frac{2}{6}$ di $\frac{3}{4} = \frac{1\times2\times3}{7\times6\times4} = \frac{6}{168} = \frac{1}{28}$ (§ 9. *applicaz.* 6 ).

## § 16.

### *Ultime riflessioni sulla natura de' rotti.*

### *Riflessione 1.*

*Accrescendo di un medesimo numero sì il numeratore che il denominatore di un rotto vero, il suo valore accrescerà.*

Sia il rotto $\frac{5}{12}$; si accresca di 6 sì il 5 che il 12: il rotto diverrà $\frac{11}{18}$. Io dico che il valore di $\frac{11}{18}$ è superiore a quello che offriva $\frac{5}{12}$.

Per giungere al comprendimento di ciò, si prenda l'unità per termine medio, a cui si paragoni il valore sì dell'una che dell'altra frazione, e si enuncii il quesito così « *chi è più distante dall'unità, il rotto* $\frac{5}{12}$ *ovvero* $\frac{11}{18}$ »? Che però l'unità, ossia 1, si traduca in forma frazionaria due volte, la prima in $\frac{12}{12}$, e l'altra in $\frac{18}{18}$.

E poi si dica

$\frac{11}{18}$ è distante da $\frac{18}{18}$ di $\frac{7}{18}$

$\frac{5}{12}$ è distante da $\frac{12}{12}$ di $\frac{7}{12}$: Ma $\frac{12}{12}$ e $\frac{18}{18}$ rappresentano l'unità, dunque $\frac{5}{12}$ ed $\frac{11}{18}$ sono distanti dall'unità, l'uno di $\frac{7}{12}$, l'altro di $\frac{7}{18}$. Ma $\frac{7}{18}$ è minore di $\frac{7}{12}$, dunque $\frac{7}{18}$ è meno distante dall' 1 di quello che il fosse $\frac{5}{12}$. Or se $\frac{7}{18}$ è meno distante dall'unità di quello che il fosse $\frac{5}{12}$, quanto più non saranno meno distanti dall'unità $\frac{11}{18}$? Ma che vuol dire esser meno distante dall'unità? Esser più prossimo e vicino al valore dell'unità. Ma chi è più vicino all'unità è maggiore di quello che è più lontano dall'unità, dunque $\frac{11}{18}$ è di maggior valore che $\frac{5}{12}$. Ma $\frac{11}{18}$ nasce da $\frac{5}{12}$ di cui si è aggiunto sì al numeratore che al denominatore il 6, *dunque accrescendo di un medesimo numero ec.*

### *Riflessione 2.*

*Togliendo l'istesso numero sì dal numeratore, che dal denominatore di un rotto vero » il suo valore diminuirà.*

Sia il rotto $\frac{5}{12}$, dal di cui numeratore e denominatore si tolga 3, il novello rotto sarà $\frac{2}{9}$: io dico che $\frac{5}{12}$ è minore di $\frac{2}{9}$.

Si prenda, come nel caso precedente, l'unità per termine medio e sia pel primo rotto $\frac{13}{13}$ e pel secondo $\frac{9}{9}$: Il rotto $\frac{6}{13}$ è distante da $\frac{13}{13}$ di $\frac{7}{13}$: il rotto $\frac{2}{9}$ è distante da $\frac{9}{9}$ di $\frac{7}{9}$. Ma $\frac{13}{13}$ e $\frac{9}{9}$ rappresentano l'unità: dunque il primo difetta dall'unità di $\frac{7}{13}$ e l'altro difetta dall'unità di $\frac{7}{9}$. Ma $\frac{7}{9}$ è maggiore di $\frac{7}{13}$, perchè le parti *none* sono sempre più grandi delle parti *dodicesime*, e chi toglie meno dall'unità, ottiene un resto maggiore, dunque $1 - \frac{7}{13}$ è maggiore di $1 - \frac{7}{9}$. Ma $1 - \frac{7}{13}$ *ossia* $\frac{13}{13} - \frac{7}{13} = \frac{6}{13}$, ed $1 - \frac{7}{9}$ *ossia* $\frac{9}{9} - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$; dunque $\frac{6}{13}$ è maggiore di $\frac{2}{9}$. Che però col sottrarsi 4 sì dal numeratore che dal denominatore di $\frac{6}{13}$, il valore è diminuito.

### *Riflessione* 3.

*Dato un rotto spurio sia multiplo sia non multiplo, se i suoi termini si accrescono dello stesso numero, il valore per lo contrario diminuirà.*

Sia il rotto spurio $\frac{8}{6}$; si accresca di 6 sì il numeratore che il denominatore: il rotto diverrà $\frac{14}{12}$: io dico che $\frac{14}{12}$ è minore in valore del rotto primitivo $\frac{8}{6}$. In fatti da $\frac{8}{6}$ trattane l'unità $\frac{6}{6}$ resta $\frac{2}{6}$ di più: dal $\frac{14}{12}$ trattane l'unità $\frac{12}{12}$ resta il dippiù $\frac{2}{12}$. Ma $\frac{2}{6}$ è maggiore di $\frac{2}{12}$ per essere le parti *seste* doppie delle parti *dodicesime*; dunque $1 + \frac{2}{6}$ è maggiore di $1 + \frac{2}{12}$. Ma $1 + \frac{2}{6}$ *ossia* $\frac{6}{6} + \frac{2}{6}$ è $= \frac{8}{6}$ (§ 9. *applicaz.* 5), ed $1 + \frac{2}{12}$ *ossia* $\frac{12}{12} + \frac{2}{12} = \frac{14}{12}$: dunque $\frac{8}{6}$ è maggiore di $\frac{14}{12}$. Ma $\frac{14}{12}$ nasce dall'accrescere di 6 sì il numeratore che il denominatore del rotto spurio $\frac{8}{6}$, dunque « *Dato un rotto spurio* ec.

### *Riflessione* 4.

*Viceversa dato un rotto spurio sia multiplo, sia non multiplo, se i suoi termini si diminuiscono di un istesso numero, il suo valore accrescerà.*

Sia il rotto spurio $\frac{8}{6}$, da' termini del quale si tolga 3, talchè il rotto divenga $\frac{5}{3}$: io dico che $\frac{8}{6}$ è minore di $\frac{5}{3}$. Infatti dal rotto $\frac{8}{6}$ toltane l'unità $\frac{6}{6}$, restano $\frac{2}{6}$: dal $\frac{5}{3}$ toltane l'unità $\frac{3}{3}$, restano $\frac{2}{3}$. Ora $\frac{2}{3}$ è maggiore di $\frac{2}{6}$, perchè le parti *terze* sono sempre maggiori delle parti *seste*; dunque l'unità $+ \frac{2}{3}$ è maggiore dall'unità $+ \frac{2}{6}$. Ma $1 + \frac{2}{6}$ è uguale ad $\frac{8}{6}$, e $1 + \frac{2}{3}$ è uguale a $\frac{5}{3}$ (§ 9 *appl.* 5); dunque $\frac{5}{3}$ è maggiore di $\frac{8}{6}$. Che però etc.

### *Riflessione 5.*

*Il rotto vero, moltiplicato pel rotto vero, diminuisce di valore.*

Sia il rotto $\frac{3}{4}$ di un ducato: il suo valore sarà espresso da grana 75. Si moltiplichi $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{6}$, il prodotto sarà (§ 13.) uguale a $\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6}$. Ritrovato il valore di questo rotto col metodo artistico, ossia dividendo ducati 15 per 24 (§ 4.) si scorgerà uguale a grana 61 e cavalli 8, certamente minore di grana 75, tuttocchè avesse subito una moltiplicazione; contrariamente a quel che avviene nel calcolo degl'intieri, di cui il valore colla moltiplicazione si accresce.

E la ragione è chiara. Imperciocchè nella moltiplicazione di A per B si esegnono due operazioni; con una il moltiplicando A si eleva di valore, quando si moltiplica il suo numeratore pel numeratore di B; coll'altra il moltiplicando A si abbassa in valore, quando si moltiplica il suo denominatore pel denominatore di B. Ma poichè nel rotto vero il denominatore è sempre maggiore del numeratore, ne succede, che l' abbassamento nel moltiplicare denominatore per denominatore è sempre maggiore dell' elevamento succeduto nel moltiplicare il numeratore pel numeratore. Che però il moltiplicando A ricevendo abbassamento posteriore più enorme che l' elevamento anteriore, non può giungere nel prodotto al valore intrinseco che prima della moltiplicazione offeriva.

Perchè dunque, con termine improprio, tale operazione appellarla *moltiplicazione*? perchè denominare il resultato dell' operazione col vocabolo *prodotto*? Vi è forse, come negl' intieri, ripetizione di valore, se per lo contrario il valore diminuisce?

### *Riflessione 6.*

*Un rotto vero, diviso per un altro rotto vero, accresce di valore.*

Sia il rotto $\frac{3}{4}$ di un ducato, che equivale a grana 75. Si divida $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{6}$, ossia si moltiplichi $\frac{3}{4}$ pel divisore rovesciato $\frac{6}{5}$: il quoziente sarà $\frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5}$. Ritrovato il valore di tal rotto col *metodo artistico* (§ 4. *tit.* 4) ossia dividendo 18 ducati per 20, il valore sarà carlini 9, certamente maggiore di grana 75; tuttocchè avesse subito una divisione; contrariamente a quel che avviene nel calcolo degl' intieri, il di cui valore colla divisione diminuisce.

La ragione è la inversa della precedente (*riflessione* 5.) Imperocchè nella divisione di A per B si esieguono due operazioni 1. l' elevazione col moltiplicarsi i numeratori e 2. l' abbassamento col moltiplicarsi i denominatori; ma rovesciandosi il divisore, il numeratore di A non viene ad essere moltiplicato per un numero minore, quale era il numeratore del rotto vero B, ma pel deno-

minatore, che nelle frazioni vere è sempre un numero maggiore. Che però l'elevamento per parte de'numeratori è maggiore in paragone dell' abbassamento per parte de'denominatori. La moltiplicazione quindi, per causa del divisore rovesciato, emette un prodotto superiore in valore di quello che il moltiplicando riteneva.

In più brevi termini. Se $\frac{3}{4}$ era moltiplicato per $\frac{5}{5}$ il valore non si sarebbe alterato; (§ 7. *trasfor.* 1.) ma moltiplicandolo per $\frac{6}{5}$, il numeratore è moltiplicato da 6 e non da 5. Come non accrescer di valore?

Perchè dunque tale operazione, con vocabolo improprio, addinominarlo *divisione*? Perchè riserbare al resultato dell'operazione il nome di *quoziente*, se il quoziente risulta maggiore del dividendo? Bisogna dire, che la teoria delle frazioni ha introdotto due operazoni dippiù nella scienza del calcolo. La moltiplicazione negl'intieri non è che una somma abbreviata, come non altro che una divisione abbreviata deve reputarsi la divisione. Nelle frazioni però la moltiplicazione e divisione non sono nè somme nè sottrazioni: sono operazioni parziali, che poggiano su specialissimi principî, e nulla hanno di comune con quelle. Se si volessero sostituire altri vocaboli più retti, io chiamerei il moltiplicare e 'l dividere *deprimere* il primo, ed *elevare i rotti* il secondo.

### *Riflessione* 7.

Ciò nullameno le pruove sulle quattro operazioni de' rotti possono eseguirsi sul modello istesso, che su quello degl' intieri, anche nella moltiplicazione e divisione, poichè dovendosi pruovare l' una per mezzo dell' altra, gli elevamenti avvenuti per l' una sono corretti dagli abbassamenti avvenuti per l' altra, e 'l prodotto diviso per un fattore riproduce l'altro fattore, ed il divisore moltiplicato pel quoziente riproduce costantemente il dividendo.

### *Avvertimento generale.*

Eccovi al termine delle speciose teorie, che agevolano la scienza del calcolo numerico, *teorie delle frazioni*. È incredibile il loro frequentissimo e severissimo uso ne' casi svariati del civile e nazionale commercio, nella distribuzione delle forze delle velocità de' tempi in Dinamica, nella divisione degli angoli e proporzioni sia di piani sia di solidi in Geometria, nello statuire le gradazioni di calorico di peso di umido di luce ec: nelle scienze fisiche e simili. Esercitatevi, o giovanetti, nella pratica e più ne' ragionamenti su gli stessi, chè a più sublimi vedute ed allo sviluppo di moltiplici giovevolissime conoscenze vi meneranno per certo.

# TITOLO V.

## TEORIE DE' DECIMALI.

### § 1.

*Riflessioni sul valore e lettura de' decimali.*

Gli Aritmetici chiamano *decimali* que' rotti, che hanno per denominatore l' unità seguita da zeri, come $\frac{5}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{6}{100}$, $\frac{18}{100}$, $\frac{120}{1000}$ e simili. Prendono il nome di *decimali*, perchè supponendo l' unità divisa in 10 parti eguali, ogni parte è *un decimo dell'unità*, e supponendo ciascuna decima parte divisa in altre dieci parti eguali, un centesimo diventa *decimale di un decimo*, un millesimo diventa *decimale di un centesimo* etc. E supponendo un tutto diviso in decimi, ogni decimo in centesimi, ogni centesimo in millesimi etc. : e volendo p. e. cominciare da' diecimillionesimi, si avrà per certo la tavola seguente

Il centomillionesimo è *decimale* del diecimillionesimo
Il diecimillionesimo è *decimale* del millionesimo
Il millionesimo è *decimale* del centomillesimo
Il centomillesimo è *decimale* del diecimillesimo
Il diecimillesimo è *decimale* del millesimo
Il millesimo è *decimale* del centesimo
Il centesimo è *decimale* del decimo
Il decimo è *decimale* dell' unità.

E così se si cominciasse dalle parti trilionesime, bilionesime ec. ognun sarebbe decimale della parte maggiore seguente, persino a che si giunga alle unità, decupli, centupli, millupli etc. che formano 10, 100, 1000 *unità* o *intieri* etc. il calcolo de' quali si è nel titolo 3.° diffusamente trattato.

A rendere intanto ragione sufficiente della lettura e valore de' decimali, vogliate, o giovanetti, intrattenervi nelle riflessioni che sieguono.

*Riflessione 1.*

Sia il numero $\frac{4517}{1000}$. Questo si può decomporre in $\frac{4000}{1000}$, in $\frac{500}{1000}$, $\frac{10}{1000}$ $\frac{7}{1000}$. Or consideriamo $\frac{7}{1000}$: che vuol dire tal rotto? Vuol dire

che voi avete diviso il tutto in 1000 parti, e ne avete precapito 7 parti *millesime*, ossia 7 di quelle parti che sono denotate dal denominatore,

Consideriamo il penultimo $\frac{20}{1000}$: qui il tutto è diviso in 1000 parti, ma dobbiamo precapire 2 decine di tali parti; che però supponendo il 1000 diviso in tanti gruppi ciascuno de' quali contenga 10 parti millesime, tutto il 1000 sarà diviso in cento gruppi, ossia in 100 parti centesime del 1000; e siccome voi ne prelevate 2, così il 2 dinota due parti *centesime* del 1000.

Consideriamo il terzo rotto $\frac{500}{1000}$: si supponga il 1000 diviso in 10 gruppi, ognuno di questi sarà composto di 100 parti millesime. Voi dovendo precapire 5 centinaia, avrete bisógno di 5 di questi gruppi, ognuno de' quali contiene 100; che però il 5 dinota parti *decime* del 1000.

Consideriamo infine il rotto $\frac{4000}{1000}$; questo suppone il tutto diviso in 1000 parti, mentre il numeratore ne chiede 4000; esso dunque è un rotto spurio multiplo, di cui chiedendosi il valore, si troverà che è uguale a 4. (§. 3. *tit. 4.*)

Riprendiamo ora da capo: il 7 a destra dinota 7 parti *millesime*: il 2 due parti *centesime*: il 5 cinque parti *decime*: il 4 quattro *unità*. I veri rotti decimali dunque sono il 7, il 2, ed il 5, perchè dinotano 7 *parti millesime*, 2 *parti centesime*, 5 *parti decime* del tutto diviso in 1000: 4 non è rotto quando dinota 4 tutti, esso dinota 4 *unità*.

*Esempio* 2. — Rechiamo un esempio più disteso, mentre questa considerazione è la chiave di tutte le teorie de' decimali.

Sia il rotto $\frac{567284}{100000}$: esso si scioglie in $\frac{500000}{100000}$, $\frac{60000}{100000}$, $\frac{7000}{100000}$, $\frac{200}{100000}$, $\frac{80}{100000}$, $\frac{4}{100000}$.

Esaminiamo questi sei rotti e cominciamo dall' ultimo.

1. Se voi dividete 100000 per 1, voi ne avrete novellamente 100000: dunque una parte del tutto diviso in 100000 è parte *centomillesima*, e 4 di queste sono parti *centomillesime*.

2. Se voi dividete 100000 per 10, voi ne avrete diecimila ossia 10000, dunque 10 è parte *diecimillesima* di 100,000, e 8 di queste, ossia 80, sono parti *diecimillesime* di 100000.

3. Se voi dividete 100,000 per 100 ne avrete 1,000; dunque 100 è parte *millesima* di 100,000, e 2 di queste, ossia 200, sono *parti millesime* di 100000.

4. Se voi dividete 100,000 per 1000 voi ne avrete 100; dunque 1000 è *parte centesima* del 100,000, e sette di queste, ossia 7000 sono *parti centesime* de' 100000.

5. Se voi dividete 100000 per 10000 voi ne avrete 10; dunque 10000 è *parte decima* del 100,000, e 60 decine di migliaja di tali parti, ossia 60000 sono *parti decime* del 100,000.

6. Se voi finalmente dividete 100000 per 100000 ne avrete tutto il 100,000; dunque $\frac{100000}{100000} = 1$ e $\frac{500000}{100000} = 5$.

Or riprendendo da capo, si troverà che il 4 a destra dinota parti *centomillesime*, l'8 dinota parti *diecimillesime*: il 2 parti *millesime*: il 7 parti *centesime*: il 6 parti *decime*: il 5 dinota *unità*. Di tal che il 4, l'8, il 2, il 7, il 6 sono veri rotti, laddove il 5 dinota unità.

*Riflessione 2.*

Esiste dunque una corrispondenza tra gli zeri del denominatore, e le cifre del numeratore. Quando le cifre del numeratore sono tante di numero, quante sono quelle del denominatore, si osserva che l'ultima cifra a sinistra dinota sempre unità. Così sia il rotto $\frac{25}{10}$; qui due cifre sono nel numeratore e due nel denominatore. Questo è risolvibile in $\frac{20}{10}$, e $\frac{5}{10}$. Or $\frac{5}{10}$ è vero rotto decimale, mentre $\frac{20}{10}$ come rotto spurio multiplo è uguale a 2 *unità*.

Similmente sia il rotto $\frac{486}{100}$. Questo è risolvibile in $\frac{400}{100}$ $\frac{80}{100}$ $\frac{6}{100}$ e or $\frac{6}{100}$ e $\frac{80}{100}$ sono veri rotti decimali, mentre $\frac{400}{100}$ come rotto spurio multiplo è uguale a 4 *unità*.

Sia finalmente il rotto $\frac{6842}{1000}$; questo è decomponibile in $\frac{6000}{1000}$, $\frac{800}{1000}$, $\frac{40}{1000}$ e $\frac{2}{1000}$. Or il $\frac{2}{1000}$, $\frac{40}{1000}$ e $\frac{800}{1000}$ sono veri rotti decimali, mentre il $\frac{6000}{1000}$, come rotto spurio, è uguale a 6 *unità*.

*Riflessione 3.*

Procedo ora a riflettere sul rotto $\frac{25}{10}$; si è trovato 5 dinotare decimali e 2 dinotare *unità*: nel rotto $\frac{486}{100}$ si sono trovate due cifre dinotare decimali e la terza dinotare *unità*: nel terzo rotto $\frac{6842}{1000}$, si sono trovate le tre ultime cifre verso destra dinotar decimali e l'ultima verso sinistra dinotare *unità*. Sicchè ove lo zero era uno, ho trovato *una cifra decimale*; dove gli zeri erano due, ne ho trovato *due*: ove tre, *tre* ec. Dunque è legge costante, che ne' rotti decimali, sieno quantunque le cifre del numeratore, i decimali saranno indispensabilmente tanti, quanti sono gli zeri del denominatore.

Così dato il rotto $\frac{426}{10}$, il solo 6 dinota decimali, ed i rimanenti dinotano unità, e deve dirsi così: il rotto $\frac{426}{10}=42$ *intieri* e $\frac{6}{10}$

$\frac{4524}{100}=45$ *intieri* e $\frac{24}{100}$

$\frac{7822306}{1000}=7822$ *intieri* e $\frac{306}{1000}$

### *Riflessione 4.*

Stante la perfetta uguaglianza di numero tra le cifre decimali e gli zeri del denominatore, io potrei risparmiarmi la fatica di trascrivere questo denominatore, piacendomi piuttosto supplirlo con la mente; così se trovassi scritto 32,3 e conoscessi che quella virgola sia un segno da separare gl' intieri da' rotti, e che al decimale 3 deve corrispondere un solo 0, io quel 32,3 lo leggerei così: 32 *intieri* e $\frac{3}{10}$, ossia 32 e *tre decimi*.

Così 852,24=852 *intieri* e $\frac{24}{100}$; 523,800=523 *intieri* e $\frac{823}{1000}$, ossia 852 e 24 *centesimi*, 523 e 800 *millesimi*.

### *Riflessione 5.*

Ma non sempre nel calcolo gl' intieri vanno uniti con i decimali; potrebbe allora la mancanza degl' intieri supplirsi con lo zero così

0,2 $=\frac{2}{10}$ *due decimi*

0,34 $=\frac{34}{100}$ *trentaquattro centesimi*

0,709 $=\frac{709}{1000}$ *settecento e 9 millesimi*

### *Riflessione 6.*

Se dunque si trova una cifra nel decimale a destra, il denominatore avrà un solo zero e sarà 10. Se vi saranno due cifre, il denominatore avrà due zeri e sarà 100, e così via dicendo.

Potrebbe intanto darsi il caso in cui la cifra fosse una, ma le parti fossero centesime, ed il denominatore abbisognerebbe di 2 zeri: tale sarebbe il caso se scriver volessi *tre centesimi*; potrei io allora scrivere 0,3? No: perchè il leggitore potrebbe leggere $\frac{3}{10}$, e ciò per non aver avuto un segno col quale fosse stato avvertito a dover supporre due zeri e non già uno. A rettificare quindi l'errore, qual segno si apporrà vicino al 3, con cui avvertire il leggitore a supporre due zeri nel denominatore? Il segno convenuto dagli Aritmetici è l'apposizione di un zero dalla parte destra, scrivendo 0,03.

Volendo filosofare su questa frase, io trovo che l' apposizione di questo zero è molto meglio indicata, poichè facendo uso della *riflessione 1.* io dirò; la prima cifra a destra dinota parte *cen-*

*tesime*, la seconda cifra più in là dovrebbe significare parti dell' ordine superiore, ossia parti *decime*. Ma quì mancano le parti decime; dunque a dimostrare la loro mancanza io appongo un zero, giusto dove le parti decime dovrebbero essere denotate. Questo zero quindi è un segno convenzionale che nulla esprime, ma avverte solamente; tanto che se gli Aritmetici avessero convenuto di apporre in sua vece una croce, un asterisco ec., io in vece di scrivere 0,03, potrei scrivere 0,+3, ovvero 0,✱3. etc.

Così se mi decidessi a scrivere *quattro intieri e tre millesimi*, io mal mi avviserei scrivere 4, 3 perchè il leggitore apprenderebbe il 3 per $\frac{3}{10}$; nè scriverei bene 4, 03 perchè l' apprenderebbe per $\frac{3}{100}$; ma dovrei scrivere 4, 003, perchè allora direbbe « Ho scorto tre cifre nella serie de' decimali, dunque dovrò supplire con la mente tre zeri nel numeratore » che però dal semplice scorgere 4, 003, dirà 4 *intieri* e $\frac{3}{1000}$. In questo rotto dunque il primo zero si appone per dinotare la mancanza delle parti *decime*; ed il secondo si appone per dinotare la mancanza delle parti *centesime*. Ma perchè non si appone il terzo zero? Perchè allora le cifre diverrebbero quattro: e supponendo quattro zeri, il rotto diverrebbe $\frac{3}{10000}$, cioè *tre diecimillesimi* contro la primiera intenzione.

È facile quindi enunciare intieri e decimali, come se fossero tutt' intieri, purchè si badi a pronunziare pel denominatore l' unità con più pochi zeri, ossia tanti quanti sono i decimali. Così 3, 4 ossia 3 intieri e 4 decimi potrò enunciarli, dicendo 34; ma al denominatore appporrò *decimi* ossia un zero, perchè una è la cifra decimale, ossia 4 « e dirò, 34 *decimi*. In fatti $\frac{34}{10}$ è uguale 3 *intieri*, e 4 *decimi* ( *riflessione* 1.). Con questa regola 222, 407 invece di leggere 222 e 407 *millesimi*, io dirò 222407 *millesimi*. Scrivendo infatti $\frac{222407}{1000}$ non sarebbe questo uguale ( *riflessione* 3. ) a 222, 407 ?

### *Riflessione 7.*

Osservando il progredimento de' valori delle cifre ne' decimali, possiamo scorgere che sieno quantunque le suddivisioni da cui cominciano a destra, sempre l' ultima cifra a sinistra dinota parti decime; così nel decimale 4, 32 il 2 dinoterà *parti centesime*, il 3 *parti decime*. Nel rotto 714, 327, il 7 dinoterà *parti millesime*, il 2 *parti centesime*, il 3 *parti decime*. Nel rotto finalmente 16, 54893, il 3 dinoterà parti *centomillesime*, il 9 parti *diecimillesime*, l'8 parti *millesime*, il 4 parti *centesime*, ed il 5 parti *decime*.

Ondecchè se ne deduce, che volendosi situare i decimali secondo l'ordine locale, le ultime a sinistra debbono collocarsi le une sotto le altre. Così i decimali sopradetti composti d'intieri e di rotti decimali procedono nella collocazione con ordine inverso fra loro, mentre scrivendo la serie degl'intieri, io principierò a situare gl'intieri con

4, 32
714, 323
16, 54893

la loro legge, unità sotto unità, decine sotto decine, centinaja sotto centinaja da destra a sinistra etc.; per lo contrario volendo scrivere i decimali gli uni sotto gli altri comincerò a situare, da sinistra a destra, parti *decime* sotto parti *decime*, parti *centesime* sotto parti *centesime* ec. ec.

A variare esempio, se io vorrei scrivere
4, 2—52, 300—4228, 03—25, 049078—0, 1: dovrei situarle a questo modo

42, 2
52, 300
4228, 03
25, 049078
0, 1

Questo si dice *situare i decimali*, le *une serie sotto le altre, secondo l'ordine locale.*

*Riflessione 8.*

Ricordiamoci di una verità elementare che facilmente si deduce dalle teorie de' numeri. Un numero moltiplicato per 10, restituisce nel prodotto l'istesso numero accresciuto di un zero; così

$$2\times10=20$$
$$22\times10=220$$
$$22\times100=2200$$

Risovvenghiamoci dell'altro principio espresso nel § 7. *trasfor.* 1. *Moltiplicandosi di un rotto sì il numeratore che il denominatore di un rotto per un medesimo numero non si altera il valore.*

Ciò premesso, sia il decimale, 0, 42; questo è risolvibile in 0, e $\frac{42}{100}$. Supponghiamo che si moltiplicasse sì 42 numeratore, che 100 denominatore per 10, non cangerà di valore, e la frase diverrà $\frac{420}{1000}$. Ma questo rotto, sopprimendo il denominatore, si deve scrivere 0, 420; dunque la frase 0, 42 è uguale a 0, 420 tuttochè si fosse accresciuta di un zero.

Così se tanto il 42 che il 100 si fosse moltiplicato per 100; la frase sarebbe divenuta $\frac{4200}{10000}$ che dovrebbe scriversi 0, 4200, e si direbbe consimilmente che la frase 0, 42 è uguale alla frase 0, 4200, tuttochè fosse accresciuta di due zeri. Così diremmo se si accrescesse di 3, 4, 5, 6 ec. e di qualunque numero di zeri, onde ne sorge la regola generale » *ogni decimale non muta di valore coll'accrescersi da parte destra di qualunque numero di* 0.

Filosofando d'altronde sulla frase 0, 3 questo dinota 3 parti decime; se la frase fosse 0, 30 dinoterebbe il tutto diviso in 100 parti, di cui se ne prenderebbero 30. Ora i tutti sono gli stessi, le parti sono diverse; ma prendendo io *tre parti decime* nella prima divisione; e 3 *parti decime dell'istesso tutto* nella seconda divisione, non ne avrò lo stesso valore? Prendendo il decimo di un ducato ed il decimo di un 100 grana, non avrò sempre per risultato un carlino?

### *Riflessione 9.*

Riflettiamo ora su quel che vien detto dagli Aritmetici « *chi divide, trasporta la virgola di un luogo da destra a sinistra: chi moltiplica, la trasporta da sinistra a destra.*

#### *Caso 1.*

Sia in effetti per le prime il numero 48,687. Questo dinota 7 *millesimi* + 8 *centesimi* + 6 *decimi*, e poi 4 *unità* + 8 *decine di unità*. Si sposti la virgola verso destra di un luogo e la frase diventi 486, 87. Quivi

il 7 dinota *centesimi*, decupli de' *millesimi*, prima dinotati.
l'8 dinota *decimi*, decupli de' *centesimi*
il 6 dinota *unità*, decuple de' *decimi*
il 46, dinota *460* intieri decupli di 46

Or se le parti sono cresciute 10 volte dippiù, il tutto sarà cresciuto dippiù anche per dieci volte. E ciò? collo spostare la virgola di un posto da sinistra a destra. Così se si sposti di due lochi la virgola verso destra, sarà il numero moltiplicato per 100, se di tre, lo sarà per 1000 etc:

Così il numero 1855 è dieci volte maggiore di 185, 5, 100 volte maggiore di 18,55; 1000 volte maggiore di 1,855.

#### *Caso 2.*

Sia d'altronde il numero decimale 48,687. Questo dinota 7 *parti millesime*+8 *centesime*+6 *decime*. Se la virgola si sposti verso

sinistra, la frase diverrà 4,8687, ed il 7 non denoterà più parti millesime, ma *diecimillesime*, che sono dieci volte minori delle millesime.

18 non più centesime, ma *millesime*

il 6 non più decime, ma *centesime*

l' 8 non più unità, ma *parti decime*

il 4 non più decine di unità, ma *unità* ——dunque coll' essersi spostata la virgola di un luogo verso sinistra, il numero è divenuto dieci volte minore, ossia è diviso per 10. Così se si sposti per due luoghi verso sinistra, sarà diviso per 100; se di tre, sarà diviso per 1000 etc:

Laonde paragonate le frasi 185,5 e 18,55 e 1,855 coll'intiero 1855, la prima è 10 volte minore, la seconda 100 volte, la terza 1000 volte minore di questa, secondochè la virgola è avvanzata di 1, di 2, di 3 posti verso sinistra.

Vero è il detto dunque » *Chi trasporta la virgola verso destra moltiplica i decimali*; *e chi la trasporta verso sinistra, li divide* »

## *Riflessione 10.*

Risovvenghiamoci di un' operazione abbreviativa proposta nella moltiplicazione degl' intieri. Quantevolte sieno i due fattori terminati da zeri, basterà, che ci dassimo a moltiplicare gl' intieri, ed al prodotto aggiungere la somma degli zeri che trovavansi nell' estremo de' due fattori, così

30×30=900: ecco due zeri nel prodotto, quanti ne aveano insieme i fattori 30 e 30.

180×30=5400: ecco due zeri.

2400×3000=7200000: ecco cinque zeri.

Or volendosi moltiplicare il decimale 3, 40 per 2,600 questi equivalerebbero certamente il primo al rotto $\frac{340}{100}$ ed il secondo al rotto $\frac{2600}{1000}$; sicchè tanto sarebbe moltiplicare 3,40 per 2,600, quanto moltiplicare 340×2600 ed apporvi per denominatore 100×1000. Ma moltiplicandosi i due primi, se ne avrebbero 884000, e moltiplicando 100×1000, si avrà non altro che la riunione degli zeri, ossia 100,000, dunque il prodotto sarebbe $\frac{88{,}000}{100000}$.

Analizzando il rapporto del numeratore di questo rotto col suo denominatore, troverete che la prima cifra, ossia 0, dinota parti *centomillesime*, la 2.ª dinota parti *diecimillesime*, la 3.ª parti *millesime*, la 4.ª parti *centesime*, la 5.ª parti *decime*, la 6.ª dinota 8 *unità*.

Volendosi quindi questo rotto volgere in frase decimale, do-

vrebbe scriversi 8,84000, che sarebbero 8 intieri, ed 84000 *centomillesimi.*

Numerate le cifre decimali, ed osserverete essere 5: numerate le cifre de'due fattori decimali 40 e 600, ed osserverete essere parimenti 5.

Sieno dunque le serie de' decimali frammiste a zeri; essi possono moltiplicarsi senza l'apposizione delle virgole, e considerarsi come puramente interi; il prodotto conterrà certamente valore di decimali e valore d'intieri. Dove però voi trasporterete la virgola per distinguere gli uni dagli altri? Sommate le cifre di due fattori decimali; e quanto è il numero di queste, tanto cifre separerete a destra del prodotto coll'apporre una virgola; quelli a destra saranno decimali, quelli a sinistra saranno intieri.

## *Riflessione 11.*

Risovveniamoci finalmente di un principio esposto nella teoria della divisione (§ 12. *tit.* 3.). Il dividendo, si disse, si deve considerare come il *prodotto del divisore* × *pel quoziente.* Voi l'osservaste più volte: moltiplicando il quoziente ed il divisore fra loro, vi si è riprodotto il dividendo. Ciò premesso, volete voi il vero dividendo di due decimali? Moltiplicate questi decimali *quoziente* e *divisore* e vi avrete il dividendo. Sia per esempio: 0,3 *divisore*, e si supponga 0,4 *quoziente*: cerca sapersi qual' è quel numero decimale, che diviso per 0,3, dia per quoziente 0,4? Moltiplicate questo divisore e quoziente fra loro secondo l'esposto della riflessione antecedente, e ne avrete il dividendo 0,12, ossia *dodici centesimi.*

Ma siccome nella precedente lezione abbiamo osservato che il prodotto di due serie decimali contiene tante cifre decimali quante ne offre la riunione de' decimali di ambedue i fattori: dunque il dividendo de' decimali riunisce tanti decimali quanti ne dinotano i decimali del divisore, ed i decimali del quoziente, insieme uniti. Così il dividendo 0,12 contiene due cifre decimali: chè due erano per l'appunto le cifre decimali, una per parte del divisore 0,3 ed una per parte del quoziente 0,4. Questo è il modo da indovinare quante cifre decimali avrà il dividendo, allora che si conoscono il divisore ed il quoziente, ossia, *il dividendo ritiene tanti decimali, quanta è la riunione de' decimali del divisore e del quoziente.* Ora bisogna invertir la domanda.

*Quante cifre decimali avrà il quoziente, allora che si conoscono quelle del dividendo e quelle del divisore?* La risposta è fa-

cilissima. Stantecchè il numero de' decimali del dividendo è la riunione del numero de' decimali del divisore e del numero de' decimali del quoziente: sopprimete voi da quello del dividendo il numero de' decimali del divisore, e la differenza o residuo dinoterà il numero de' decimali del quoziente. Di qui sorge la regola generale.

*In ogni divisione de'decimali, il quoziente avrà tante cifre decimali quante ne nota la differenza tra il numero di quelle del dividendo ed il numero di quelle del divisore.*

## § 2.

*Date più serie di decimali, sommarle fra di loro.*

*Sieno i numeri decimali* 0,42+18,20489+5,3+4286,703

Si dispongano le serie colla condizione, che gl' intieri si notino l'uno sotto l'altro colla loro corrispondenza locale, come è notato nel tit: 3.§.1 ossia unità sotto unità, decine sotto decine, centinaia sotto centinaia ec. I decimali per lo contrario si notino da sinistra a destra colla condizione che le parti decime sieno collocate sotto le decime, le centesime sotto le centesime, le millesime sotto le millesime etc: secondochè è esposto *nella riflessione* 7.ª *di questo titolo* come siegue

```
   0, 42
  18, 20489
   5, 3
4286, 702
---------
4310, 62689
```

Si sommino dette serie, come se fossero serie d'intieri, e l'aggregato sarà 4310 *intieri* e 62789 *cento millesimi*

## § 3.

*Date due serie disuguali di decimali,*
*sottrarle fra di loro.*

Che si scriva la serie minore sotto la maggiore colla corrispondenza locale, come si è detto nella *riflessione* 7. e si sottraggano come se fossero serie d' intieri.

Così dato 5,82978 da sottrarsi dal numero decimale 48,99, si scrivano come siegue

```
48, 99
 5, 82978.
```

Indi si scrivano, ovvero si suppongano suppliti gli zeri appresso il 99; chè ciò non lede al suo valore (*riflessione* 8.ª), come scritto se fosse

$$\begin{array}{r} 48;\ 99000 \\ 5,\ 82978 \\ \hline 43,\ 16022 \end{array}$$

e l'operazione correrà come nella sottrazione degl'intieri, ottenendosi per residuo 43 *intieri* e 16022 *centomillesimi*.

## § 4.

*Date due serie di decimali, moltiplicarle fra loro.*

Per moltiplicare, si considerino i due fattori come intieri, senza l'apposizione della virgola, e si moltiplichino le due serie, ossia i due fattori come se fossero intieri: ma dal prodotto si debbono separare con la virgola tante cifre, quante ne contiene il numero delle cifre decimali de' due fattori.

Tre casi intanto possono darsi; chè si vuole
0 moltiplicare un decimale per 10, 100, 1000 ec.
0 moltiplicare un decimale per un intero.
0 moltiplicare decimale per decimale.

### *Caso 1.*

Sia 0,4892 *da moltiplicarsi per 100.* Il prodotto sarà la riproduzione dell'istesso numero, ma l'apposizione di due zeri caccerà negl'intieri 4 ed 8, e il prodotto sarà 48, 9200 (*riflessione* 9.ª).

E la ragione è per se chiara; perchè moltiplicare vuol dire elevare un fattore ad un valore tante volte di più quanto vien significato dall'altro. Ora supponendo un zero a destra, le cifre in là acquisteranno un valore dieci volte di più: ma le parti decime ultime a sinistra elevandosi ad un valore dieci volte di più, formano intieri; dunque per necessità l'ultima cifra passerà fra gl' intieri. E per la ragione medesima apponendosi due, tre, quattro 0, si spiccheranno verso sinistra due, tre, quattro cifre fra gl' intieri, e la virgola si dice essersi avvanzata due, tre quattro passi verso destra.

Così dovendosi moltiplicare 48,357902 per 1000, il prodotto sarà 48357902 accresciuto di tre zeri, ossia 48357902000;

e dovendo la virgola avvanzarsi verso destra di tre lochi, il prodotto sarà 48357, 902000.

*Caso 2.*

*Sia* 42, 328 *da moltiplicarsi per* 35.

Che se poi in vece di moltiplicarsi per 10, 100, 1000, si moltiplichi per cifre significative p. e. 25, allora la regola non sarà diversa dall' esposta, perchè se moltiplicandosi il decimale per 10. voleva dirsi, che il decimale si fosse preso in valore 10 volte di più; moltiplicandosi per 25, vuol dirsi che ciascuna cifra de' decimali deve prendersi 25 volte di più. La gradazione è la stessa, quindi è lo stesso metodo nel calcolo.

Si consideri quindi il decimale come intiero con togliere la virgola; si moltiplichi per vero intiero, e nel prodotto si separino con la virgola tanti decimali quanti eran quelli del moltiplicando. Che però si dispongano i proposti numeri, come intieri così.

```
  42328
     35
 ------
 211640
126974
-------
1481780
```

Si separino con la virgola dal prodotto tre cifre, quante erano di numero le cifre decimali del moltiplicando, ed il numero 1481,780 risolverà la quistione.

Così moltiplicare 48, 7002 per 72 sarebbe lo stesso che moltiplicare 487002 per 72 ed averne il prodotto 35054144. Ma poichè questo prodotto non è altro che il decimale 48,7000 preso 72 volte, perciò non avrà che il medesimo numero delle cifre decimali che prima, mentre quelle che da decime passarono ad unità, si rovesciarono negl' intieri; che però il vero prodotto sarà 3505, 4144 che ha quattro cifre decimali, quanto ne aveva il moltiplicando 48, 7002.

*Caso 3.*

*Sia da moltiplicarsi 42,0042 per 0, 07.*

Si scrivano i due fattori, l' uno sotto l' altro come siegue.

```
 420042
     07
-------
2940294
```

e si moltiplichino fra loro, come se fossero interi. Ma poichè il prodotto contiene in se la riunione del numero de' decimali (*riflessione* 11, *tit.* 5) de' due fattori, e qui i decimali sarebbero sei di numero, quattro cifre per 42,0042, e due per 0,07; dunque il prodotto avrà la virgola dopo il 2, e le altre sei verso destra apparterranno a'decimali, e sarà 2,940294, ossia 2 interi e 940294 *millionesimi*.

Così 9283, 00009×per 4, 03 darà l' operazione

```
   928300009
         403
   ---------
  2784900027
  000000000
37613200036
------------
365106903627
```

E poichè il numero de' decimali di ambedue i fattori è di 8, così la virgola si apporrà tra l'ottava e nona cifra, e 'l vero prodotto sarà 3651, 06903627.

## § 5.

***Date due serie disuguali di decimali, dividerle fra loro.***

Per dividerle, si considerino sì il divisore che il dividendo come fossero intieri, senza l' apposizione della virgola, e si dividano con le regole degl' intieri; ma il quoziente abbia tante cifre decimali quante ne dinota la differenza del numero de' decimali del dividendo sul numero de' decimali del divisore.

Possono intanto avvenire tre casi, 1. o si vuol dividere un decimale per 10, 100, 1000, ec: 2. o si vuol dividere un decimale per un intiero, 3. o un decimale per un altro.

*Caso* 1.

*Sia il decimale* 9483, 00345 *da dividersi per 1000.* Che si trasporti la virgola di tre lochi verso sinistra, e si avrà il quoziente 6,48300345 (*riflessione* 11, *tit.* 5.). Essendo infatti passate le 3 cifre 483 ne' decimali, tutta la frase è diminuita per 1000, come fu ampiamente dimostrato.

*Caso* 2.

*Sia da dividersi* 44, 56 per 7.

Si sopprima la virgola e'l numero diventi 4456.

Se si fosse 4456 diviso per 7, il quoziente sarebbe stato 536 col

resto 4, ossia 536 $\frac{4}{7}$ (§. 22 *caso* 3.). Ma questo sarebbe un quoziente 100 volte maggiore, per essersi diviso 4456 intieri e non già 44, 56 che è 100 volte minore (*rifles.* 9. §. *tit.* 5.) dunque conviene che si deprima per cento volte in valore si il numero 536, che $\frac{4}{7}$. Ma come 336 si riduce a 100 volte meno di quello che è? col dividerlo per 100, ossia coll' apporre la virgola due posti distante dall' unità, ed averne così 3,36 (*rifless.* 9. *tit.* 5. ).

Il vero quoziente dunque sarebbe 3 *intieri*, 36 *centesimi e* $\frac{4}{7}$ *di un centesimo.*

Ora si osservi: il decimale 44, 56 conteneva due cifre decimali: diviso per 7 ha dato per quoziente 3, 36 e $\frac{4}{7}$, dove si osservano pure due decimali che sono il 3 ed il 6 del 36 *centesimi.*

Regola dunque generale sia

1. *Si sopprima la virgola nel decimale: si divida questo come se fosse intero pel divisore dato.*

2. *Dal falso quoziente si separino colla virgola tante cifre quante sono i decimali del dividendo.*

Questo sarà il vero quoziente, quante volte si volesse trascurare, come di troppo leggier momento, il rotto $\frac{4}{7}$ *di un centesimo.* Che se poi non si voglia trascurare, s'istituisca il seguente ragionamento.

Per avere il valore di $\frac{4}{7}$ *di un centesimo,* io debbo dividere il numeratore pel denominatore ossia 4 *centesimi* per 7 ossia 0,04 per 7. (§ 4. *tit.* 4.) E non potendo ciò eseguire appongo un 0 alla destra di 4 e la frase diverrà 0,040 ossia 40 *millesimi*; ciocchè non lede al suo valore (*riflessione* 8.). Che si divida per 7 e se ne avranno al quoziente 5 *millesimi* ossia 0, 005 col resto 5 *millesimi.*

Proseguiamo ad occuparci de' 5 *millesimi* residuali ossia di 0, 005. Questo potrà ridursi, coll' apposizione di un zero dopo il 5 in 0,0050 ossia 50 *diecimillesimi*, che divisi per 7 daranno al quoziente 7 *diecimillesimi* ossia 0, 0007 con 2 *diecimillesimi* residuali, che col metodo esposto possono ridursi in *centomillesimi*, *millemillesimi* ec.

Ritornando ora col pensiero all' operazione precedente si osserva che il decimale 44, 56 diviso per 7 dà al quoziente 5, 36 + 5 *millesimi* ossia 0, 005 + 7 *diecimillesimi* ossia 0, 0007.

Che si sommino tali decimali come è stato indicato nel § 10, *tit.* 5. in questo modo

3, 36
0, 005
0, 0007

La loro somma sarà 3, 3657 ec.

**Volendone formare regola generale :**

1. *Al residuo si aggiunga uno zero per volta e si prosiegua la divisione.*

2. *Ogni quoziente, che si otterrà l'uno dopo l'altro, si scriva dopo il quoziente principale già ottenuto.*

Così nel caso nostro il 5 ottenuto alla prima divisione ed il 7 ottenuto alla seconda si sono posti l'uno dopo l'altro dopo il quoziente principale 5, 36 formando così 5, 3657 ec.

Ed a ragionare sul fatto, il 5 ed il 7 nell'anzidetto decimale non dinotano 5 *millesimi* e 7 *diecimillesimi* ? Che altro è 3, 3657 ec. se non (§ 2, *tit.* 5) 7 *intieri* $\frac{3}{10}+\frac{6}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{7}{10000}$?

*Caso 3.*

*Sia da dividersi* 84, 00046 per 4,2.

Si sopprima la virgola sì nel dividendo che nel divisore, e si dividano fra loro come interi, così

```
42               8400046
------           84
20001 4/42       -------
                   = 46
                     42
                     --
                      4
```

E poichè i decimali del dividendo superano di 4 cifre i decimali del divisore, quindi si separino quattro cifre nel quoziente 20001, ed il quoziente diventerà 2, 0001 $\frac{4}{42}$ ossia 2 *intieri*, 1 *diecimillesimo* e $\frac{4}{42}$ di *diecimillesimo*, che per la loro estrema picciolezza potrebbero trascurarsi.

E se non volessero trascurarsi? che si divida il numeratore pel denominatore, ossia 4 *diecimillesimi* ossia 0,0004 per 42 e non potendosi eseguire la divisione, che si aggiungano al 0,0004 almeno due zeri riducendolo a 0,000400, ossia 400 *millionesimi*, che divisi per 42 darebbero 9 *millionesimi*, ossia 0,000009 al quoziente col resto di 32 *millionesimi*. Che si sommino i decimali del quoziente principale co' novelli ritrovati

2,0001
0,000009

La somma sarebbe 2,000109 con 32 *millionesimi* di resto.

Si opererebbe così su questo novello rotto, se non si volesse per picciolezza trascurare, e'l quoziente allora sarebbe 2,000109 ec.

## § 6.

*Approssimare il quoziente di una divisione, per quanto più è possibile, al vero.*

La teoria de' decimali è stata sempre fertilissima di profittevoli aiuti nel calcolo de' numeri ed in sulle prime.

Potete avere osservato, che nel dividere gl' intieri fra loro, non sempre il dividendo è stato esattamente divisibile in parti uguali al divisore; ma che piuttosto vi sono rimasti de' residui indivisibili. I decimali non si arrestano a questo impedimento, ma offrono il mezzo come proseguire la divisione. Bisogna partire però dalla seguente riflessione.

Sia il rotto $\frac{30}{10}$ è uguale a 3 e si dica « Nel rotto $\frac{30}{10}$ (*rifles-* « *sione* 2.) 0 dinota parti *decime*, 3 dinota *unità*: ma fra le parti decime e gl'intieri io debbo apporre una virgola: dunque invece di $\frac{30}{10}$ io scriverò 3, $\frac{0}{10}$: supponendo poi mentalmente il denominatore 10, io scriverò 3, 0. Ciò premesso, sia 255 da dividersi per 7; si esegua l' operazione come qui sotto

| 7 | 255 |
|---|---|
| 36,4 | 21 |
| | =45 |
| | —42 |
| | — 3,0 |

Ognun vede, che giuntosi al residuo 3 è impossibile proseguire la divisione. Che farò allora? Considererò questo 3 come decimale, e senza farlo perdere di valore, lo considererò come $\frac{30}{10}$ ossia come 3 e $\frac{0}{10}$, o più brevemente come 3,0; e poi considerando come non apposta la virgola, io continuerò la divisione per 7; e poichè ho diviso parti 30 per *decime* per 7, il quoziente 4 esprimerà quattro parti *decime*. Le scriverò a fianco del quoziente principale 36, dopo aver per distinzione inframezzata una virgola, e dirò che il quoziente di 255 diviso per 7 non è solamente 36, ma 36 e 4 parti *decime*, ossia 36, 4.

Nè vado di ciò contento. Nel dividere le 30 parti *decime* per 7 io ne ho avuto per residuo 2 parti *decime*, che si scrivono certamente 0, 2. (*riflessione* 2.) Ma apponendo qualunque numero di zeri a destra del 2, non si muta il valore (*riflessione* 8) dunque io

posso queste due parti decime trasformarla in una delle forme seguenti ed altre

0, 20
0, 200
0, 2000
0, 20000

col vantaggio che nella prima forma era divisa in dieci parti, nella seconda in cento parti, nella terza in 1000 ec. senza che perda di valore ciascuna parte decima. Che ne siegue da ciò? Che io potrò continuare la divisione senza mutar valore con apporre al residuo quanti zeri mi piaceranno, sempre col maggior vantaggio, che più zeri apporrò, più mi avvicinerò al vero quoziente in sino a che resteranno parti *milionesime*, e se pur si vogliono, *bilionesime*, *trilionesime* etc. per sino a tanto che la loro indicibile e straordinaria picciolezza le farà considerare come evanescenti, e che perciò non disturbano il calcolo di errore sensibile.

Per le prime coll' opposizione di un zero trasformerò le due decime in centesime ossia in 0,20 e dividendole per 7, ne avrò 2 parti centesime, ossia 0,02 col resto 6 *centesime*, ossia 0,06. Passando queste a millesime ossia a 0, 060, e dividendole per 7, ne avrò 8 *millesime* ossia 0,008 col residuo 4 millesime ossia 0,004. Passando queste a diecimillesime ossia a 0,0040 e dividendole per 7 avrò 5 *diecimillesime* ossia 0,0005 e così in prosieguo. E volendo sommare i ritrovati quozienti, avrò

*Quoziente pe' decimi* 36,4
*pe' centesimi* 0,07
*pe' millesimi* 0,008
*pe' diecimillesimi* 0,0005 etc.

*Somma* 36, 4785 *ossia* 4785 *diecimillesimi*.

Così l'apposizione in altri esempj degli zeri e la protratta divisione darà parti centomillesime, millionesime, diecimillionesime ec.

## § 7.

*Approssimare il valore di un rotto, quanto più è possibile, al vero.*

Si disse che il valore di un rotto si ha con dividere il numeratore pel denominatore: siamo dunque all'istesso caso che il precedente, poichè nell' eseguire una cotal divisione, possono darsi de'residui, a' quali l'operazione si arresta. Si consideri allora il numeratore come un intiero ridotto a frase decimale, e ciò coll'accrescersi tanti zeri quanti se ne vogliono. Si proceda a dividere tale numeratore trasformato pel denominatore, e si avrà così un quoziente approssimato, quanto più è possibile, al vero.

Sia il rotto $\frac{7}{8}$. Per averne il valore, dovrò dividere il 7 per 8. Considererò il 7 come 7,0 (*riflessione* 3), e poichè l'aggiunzione di quanti zeri si vogliono non altera il decimale, ( *riflessione* 8. ) così potrò per 8 dividere una delle seguenti parti

0, 70
0, 700
0, 7000
0, 70000
0, 700000 ec.

ed io nella prima avrò per quoziente 0, 8: nella seconda 0, 87: nella terza 0,875 ec. ossia $\frac{8}{10}$, o $\frac{87}{100}$, o $\frac{875}{1000}$, e poichè il 0,7000 è diviso esattamente da 8, il valore esatto del rotto $\frac{7}{8}$ è 0,875.

## § 8.

*Scoperta delle frazioni periodiche e loro nomenclatura.*

1. Alle volte volendo approssimare il valore del rotto al più vero che fosse possibile, dopochè si è impreso a dividere il numeratore pel denominatore, si è osservato che i resti delle divisioni rispettive sono stati sempre gli stessi, e che perciò al quoziente son ritornate costantemente le medesime cifre. Così volendo dividere 2 per 3 nel rotto $\frac{2}{3}$ i resti sono stati costantemente 2 ed i quozienti 6, come qui si osserva.

```
                      2,000000   | 3
                      1,8 .....  |------
                      ----         666666
                       20
                       18
                       ----
                         20
                         18
                         ----
                          20
                          18
                          ----
                           20
                           18
                           ----
                            20
                            18
                            ----
                             2
```

Qui si è diviso 3,000,000 per 2, ed al quoziente si è avuto costantemente 6; e più zeri (e fosser pur mille ed infiniti) si fossero aggiunti, si sarebbe ottenuto sempre l'istesso quoziente, 6, 66, 666, 6666, 66666, etc.

In tal caso la frazione si dice *frazione periodica decimale*; e perchè è tornata una sola figura, si dice *frazione periodica semplice*.

2. Alcune volte più cifre ricompariscono come nel rotto $\frac{22}{27}$. Imperciocchè dividendo 22 per 27, ossia 22,0000000 etc. per 27 se ne avranno al quoziente le cifre 851, che costantemente ritornano, quando anche la sopraggiunzione degli zeri e la divisione continuasse all'infinito; talchè il quoziente sarebbe 0,851,851,851, 851 etc. e quanto più se ne vogliano aggiungere.

Questa si dice ancora *frazione periodica decimale*; ma perchè le cifre sono più di una, dicesi *periodica decimale composta*.

3. Alle volte il periodo delle cifre costanti non comparisce alle prime cifre, ma dopo alquante; così il rotto $\frac{1}{6}$ dà al quoziente 0, 1666666 etc., dove la cifra costante 6 comparisce dopo 1. Nella frazione $\frac{7}{12}$, il quoziente è 5833333 etc. dove il 3, cifra costante, è comparso dopo le due prime cifre 58.

Questa si dice frazione *periodica decimale mista*.

Le frazioni dunque periodiche decimali sono tre

1. *Frazioni periodiche semplici*.
2. *Frazioni periodiche composte*.
3. *Frazioni periodiche miste*.

## § 9.

*Metodi come far ritornare i decimali a frazioni.*

Sia il decimale 3,12; come richiamarlo a frazione?

Col metterlo sotto forma di rotto spurio, risultante dalla riunione degl'intieri e decimali per numeratore e 100 per denominatore avendone la frase $\frac{312}{100}$. E chi non sa dall'esposte cose che $\frac{312}{100}$ è uguale a 3 *intieri* e $\frac{12}{100}$? Si dirà dunque 3, 12 $= \frac{312}{100}$.

## § 10.

*Far ritornare le frazioni decimali periodiche a frazioni ordinarie.*

Possono darsi tre casi, o la frazione periodica decimale è semplice, o è composta, o è mista.

*Caso 1.*

Se il rotto sarà rotto *decimale periodico semplice* e si tenga il seguente ragionamento.

1. I numeri più semplici, che divisi l'un l'altro danno sempre 1 per quoziente, sono 9 ed 1 seguito da zeri: così

```
   9          1,00000
 ------         9
 111111       ----
                10
                 9
               ----
                 10
                  9
                ----
                  10
                   9
                 ----
                   10
                    9
                  ----
                    1
```

Se si dasse quindi un decimale periodico composto di 1, come p.e. 0,11111 etc., questo nascerebbe dal dividere 1 per 9 ossia da $\frac{1}{9}$: ma poichè $0,11111 \times 3$ è uguale a 0,33333, dunque se si dasse un decimale 0,33333 sarebbe uguale al rotto $\frac{1}{9} \times 3 = \frac{3}{9}$. Così se si avesse 0,444 ec. sarebbe uguale a $\frac{4}{9}$ e 0,888 sarebbe uguale ad $\frac{8}{9}$ ec. ec.

*Caso 2.*

*Sia la frazione periodica composta* 0,272727 ec.

Per avere nel quoziente 01, 01, 01 ec., bisogna dividere per 99 l'1 seguito da zeri, come

```
   99         1000000
 ------        99
 010101       ----
              =100
                 99
               ----
                 —100
                    99
                  ----
                    =1
```

dove si vede, o giovanetti, che obbligati a calare due zeri, siete obbligati ad aggiungere un zero al quoziente.

Trovandosi quindi un rotto decimale 0,010101 ec. questo nascerebbe dal dividere 1 per 99 ossia dal rotto $\frac{1}{99}$. Ma poichè moltiplicando 010101 ec. per 27 ecc. nascerebbe 27,27,27 come dall'operazione ,

```
01, 01, 01
        27
----------
07, 07, 07
20, 20  2
----------
27, 27, 27
```

dunque se si trovasse 0, 272727 ec. periodo decimale fatto di 27, non bisognerebbe far altro che elevare il rotto $\frac{1}{99}$ al valore di 27 : ma ciò si fa moltiplicando il solo numeratore per 27, dunque il rotto sarebbe $\frac{27}{99}$. Con simil ragionamento.

0, 834834834 $= \frac{834}{999}$

Imperocchè si divida 0, 834834834 per 999 in questo modo

```
999               1000000000000
-----------        999
10001001001       ----
                  =1000
                     999
                    =1000
                       999
                      ----
                       =1 etc.
```

ben si vede che essendo obligati a calare 3 zeri, avete dovuto aggiungere due zeri al quoziente. Or si moltiplichi il quoziente per 834 così :

```
 01001001001
         834
 -----------
  04004004004
 03003003003
08008008008
---------------
0834834834834
```

e se ne avrà il periodo 834, 834, 834 ec.

*Caso 3.*

*Sia la frazione periodica decimale mista* 0, 6333 ec. Separando la cifra che non ritorna da quella che ritorna, la frase diventa 6, 3333 ec. che, pel trasporto della virgola di un luogo verso destra, è divenuta dieci volte maggiore (*rifl. 6. § 1.*) Ma 3333 ec. tornano a frazione con moltiplicare $\frac{1}{9}$ per 3 ossia con $\frac{3}{9}$ (*caso 2. antec.*) dunque le frase 6,3333 ec. è uguale a $6+\frac{3}{9}$ e ridotto ad un sol rotto (§ 9. *applicaz.* 4. *tit.* 4.) è uguale $\frac{6\times9+3}{9}=\frac{57}{9}$. Ma questa frase era 10 volte maggiore pel trasporto anzidetto della virgola, conviene dunque che il rotto diminuisca per 10 volte. E come ciò? col moltiplicare il denominatore 9 per 10 (*lemma 2.* § 8. *tit.* 4.); la frazione dunque sarà $\frac{57}{90}$.

Sicchè l'operazione si riduce alla seguente

1. *Si cacci la virgola a principio del periodo*
2. *Si trovi il rotto, da cui nasce il periodo*
3. *Si unisca questo rotto al numero, che non torna*
4. *Si divida questo rotto per* 10, *per* 100, *per* 1000, *secondochè il periodo è di uno o di due o tre cifre ec.*
5. *Il rotto, se è suscettibile, si riduca a minimi termini.*

*Avvertimento.*

Altri aritmetici per numeratore appongono le cifre che non tornano con quelle che tornano, ma diminuite di quelle che non tornano; così prendono il 63. che costa di 6 che non torna e 3 che ritorna, ma lo diminuiscono di 6 che non torna. In fatti 63—6= 57, e direbbero 0,6333 ec. $=\frac{57}{9}$.

Ecco, o giovanetti, un'altra delle più speciose teorie della scienza de' numeri. Voi sarete dalla di loro applicazione e disvolgimento mirabilmente agevolati ne' diversi calcoli, che vi presenteranno sia le diverse misure novelle, sia le divisioni e suddivisioni de' tempi e delle orbite degli astri, sia i rapporti delle circonferenze co' rispettivi diametri e simili. Voi non uscirete da' presenti Aritmetici trattati, che non vi convincerete vieppiù de' sommi ed indicibili vantaggi, dalla scoperta de' decimali al progredimento delle Matematiche e delle arti copiosamente recati.

# TITOLO VI.

## TEORIA DELLE POTENZE

### § 1

Il prodotto di un numero moltiplicato per se stesso si dice *quadrato* con nome mutuato dalla Geometria, in cui una figura quadrilatera di quattro angoli eguali *quadrato* parimenti si appella.

Così se si moltiplica 4×4, si avrà 16 il quale si dirà *quadrato* di 4: il 4 poi si dirà *radice quadrata* per rispetto a 16. E vuolsi intendere per *radice quadrata* quel numero che moltiplicato per se stesso da origine al quadrato.

Gli Algebristi considerando ogni numero una *potenza prima* dicono il quadrato *potenza seconda*, perchè alla formazione del quadrato concorrono due medesimi fattori o *potenze prime*, come 4×4.

Si direbbe poi *potenza terza*, *quarta*, *quinta* ec., se i fattori medesimi si moltiplicassero 3, 4, 5 volte ec. come

4×4×4 — *potenza terza*, o *cubo*
4×4×4×4 — *potenza quarta*
4×4×4×4×4 = *potenza quinta*

Gli Algebristi dinotano le potenze *seconda*, *terza* e *quarta* col segno $^2$, $^3$, $^4$ etc. apposti un po sopra del numero *radice*. Così $4^2 = 4\times4$, e $5^3 = 5\times5\times5$.

La radice poi *quadrata* o *cubica* o di potenza *quarta*, *quinta* etc. si nota col segno $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$ che si prepongono al numero da cui si vogliono estrarre. Così $\sqrt{49}$ vuol dire, che dal numero 49 si deve estrarre la radice quadrata che è 7; $\sqrt[3]{512}$ vuol dire che dal numero 512 si deve estrarre la radice cubica o terza, che è 8.

Questa teoria è importante per mille usi dell'umana vita, per la esattezza de'calcoli più sublimi, nonchè per la gran fiaccola che prepara alla Geometria. Conviene sulla stessa, o giovanetti, ripiegare la più viva attenzione.

## § 2.

### *Quadrati de' numeri semplici e delle unità seguite da zeri.*

I quadrati de' numeri semplici, come dalla tavola Pitagorica, sono:

*Quadrati* 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81
*Radici* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

I quadrati de' numeri seguiti da zeri sono il quadrato delle cifre significative e 'l doppio degli zeri apposti a'*numeri radici*. Così

10 a quadrato=100
200 a quadrato=40000
25000 a quadrato=625000000

## § 3.

### *Elevare un numero a quadrato.*

Con due metodi si può elevare un numero a quadrato, *metodo ordinario e metodo di decomposizione.*

### *Metodo ordinario.*

1. Il metodo ordinario e primitivo di elevare un numero a quadrato è quello di moltiplicarlo per se stesso; così ad elevare 42 a quadrato, di altro non è uopo che di moltiplicare 42 per 42 in questo modo

$$\begin{array}{r} 42 \\ 42 \\ \hline 84 \\ 168\phantom{0} \\ \hline \end{array}$$

*Somma* 1764 *quadrato*

Sulla formazione di tal quadrato però si può osservare che si sono fatte quattro moltiplicazioni

2×2 ossia *quadrato delle unità*,
2×4 ossia le *decine* × per le unità,
4×2 ossia le *decine* × per le unità,
4×4 ossia le *decine* × *per le decine*, ossia *quadrato delle decine*.

Possono peraltro ridursi a tre, perchè invece di dire due volte le decine × per 3, si può dire « *doppio delle decine ossia* 8×3 ». E cominciando dalle decine piuttosto che dalle unità, possiamo nel quadrato di 42 considerare tre moltiplicazioni

4×4——*quadrato della prima cifra*
8×2——*doppio della prima cifra × per la seconda*
2×2——*quadrato della seco[illegible]*

*Metodo di decomposizione.*

2. Il metodo di decomposizione consiste in dividere in parti il numero che si vuole elevare a quadrato, e moltiplicare il tutto per ciascuna sua parte.

Sia il numero 8 diviso in 5 e 3, e si disponga così

$$\begin{array}{ccc} & 8 & \\ 5 & e & 3 \end{array}$$

io ragionerò in tal modo: tanto è moltiplicare il tutto per se stesso, quanto moltiplicare il [illegible] sua parte: e nel caso nostro, tanto è m[illegible] è moltiplicare 8 prima per 5 e poi per 3, riun[illegible] i prodotti. Volendolo mettere in frase, si scr[illegible]

$$8\times8=\begin{array}{l} 8\times5=40 \\ 8\times3=24 \end{array}$$

*Somma* 64 *quadrato di* 8

Io analizzo in simil modo sì la frase 8×5 che 8×3: e prendendo di mira la prima 8×5 io dirò » se 8 fosse diviso parimenti in 5 e 3, tanto sarebbe moltiplicare 8×5, quanto moltiplicare 5×5 e 3×5, e la frase sarebbe decomposta in altre due in questo modo

$$8\times5=\begin{array}{l} 5\times5 \\ 3\times5 \end{array}$$

Similmente la seconda frase 8×3 subirà una decomposizione, chè tanto è moltiplicare 8×3, quanto moltiplicare la parte 5×3 e la parte 3×3, scrivendosi la frase così

$$8\times3=\begin{array}{l} 5\times3 \\ 3\times3 \end{array}$$

Sicchè tutto l' arbore della *potenza seconda o quadrato di* 8

che era prima decomposto in due rami, per essersi decomposto ciascuno in altri due, diventerà

$$8\times8=\begin{cases}8\times5 & \begin{cases}5\times5=25\\ 5\times3=15\end{cases}\\ 8\times3 & \begin{cases}5\times3=15\\ 3\times3=\ \ 9\end{cases}\end{cases}$$

$$\overline{\quad 64\quad}$$

Ma $5\times5$ è l'istesso che *quadrato* di 5: e $5\times3$ e $3\times5$ è l'istesso che *doppio di* $5\times3$; e $3\times3$ è l'istesso che *quadrato* di 3: dunque $8\times8$ ossia quadrato di 8 è uguale al *quadrato di* 5 + *doppio di* $5\times3$ + *quadrato di* 3. Dal che ne sorge il teorema

*Il quadrato di un numero diviso in due parti è uguale al quadrato della prima parte + doppio della prima parte moltiplicato per la seconda + quadrato della seconda.*

*Modo di e[illegible] un numero di due cifre.*

Applichiamo sul numero composto di due cifre l'esposta teoria. Sia 38 diviso in 30 ed 8. Esso sarà uguale al *quadrato* di 30 + *doppio* di $30\times8$, + *quadrato* di 8. Ora il quadrato di 30 è uguale a 900; il doppio di 30 ossia $60\times8=480$; ed il quadrato di 8 è uguale a 64, che disposti in questo modo.

$$\begin{array}{r}900\\480\\64\\\hline\end{array}$$

danno 1444 *quadrato* di 38

Qui gli Aritmetici a risparmiare le moltiplicazioni, che portano nel prodotto gli zeri, in vece di scrivere 900 scrivono 9, in vece di scrivere 480 scrivono 48, ma nel situare i prodotti gli uni sotto gli altri, fanno sì che il secondo superi il primo di un luogo verso destra, il terzo superi il secondo anche di un luogo, e così in prosieguo in questo modo

$$\begin{array}{l}9\\48\\\ \,64\\\hline1444\end{array}$$

Perde forse il primo numero il valore di 900 ? Nò, perchè nell' assegnare a' numeri l' ordine locale, si è dato al 9 il terzo luogo da destra a sinistra, ed il calcolatore può benissimo supplire con la mente i due zeri, che per la brevità si sono intralasciati. Così 480 costando di quattro centinaja ed 8 decine, si è dato il terzo luogo a quelle ed il secondo a [illegible]

Vi si aggiunge un'altra brevit[illegible] in vece di dire *quadrato di* 30 si può dire [illegible] quadrato il terzo luogo, chè lo stesso è pu[illegible] fosse 900 : in vece di dire *doppio di* 30×8, si potrà [illegible] 3 ossia 6×8 e scrivere 48 come se scritto si fosse 480 : ed allora senza volgere il pensiero a numeri grandi, che nella moltiplicazione potrebbero introdurre errore o fastidio, si potrà fare semplice calcolo sopra 3 semplici cifre, e dire

$$38\times38=3\times3+\text{doppio di } 3\times8+8\times8, \text{ ossia}$$

*Il quadrato di un numero composto da due cifre è uguale al quadrato della prima cifra + doppio della prima×per la seconda+ quadrato della seconda.*

## § 5.

### *Elevazione a quadrato di un numero di 3 cifre.*

Sia 348 un numero composto di tre cifre. Io lo divido in tre numeri 300, 40, ed 8 : indi mi occupo del solo quadrato di 340 che suddivido in 300 e 40 e dirò : essendo 340 diviso in 300 e 40, il suo quadrato sarà uguale a quadrato di 300+doppio di 300 ossia 600×40+quadrato di 40, quali prodotti apporrò gli uni sotto gli altri, come sieguono

$$\begin{array}{r} 9000 \\ 2400 \\ 1600 \\ \hline \end{array}$$

tirandone la somma ne ho 13000 *quadrato*

Indi considero il numero 348 diviso in 340 ed 8, e poichè questo è uguale a quadrato di 340+doppio di 340 × per 8+quadrato di 8, io eleverò a quadrato 340 ; ma questa operazione posso ben risparmiarmela per averla già eseguita poco prima, non do-

vrò che sottoscrivere all'aggregato 13000 il doppio di 340×40+ quadrato di 8: in questo modo

13000
5440
64
———
[illegible]8504

E conne[illegible] somma, avrò

[illegible]
2400
160
5440
64
———

*Somma* 17064 *quadrato di* 348

E tutto il processo si è ridotto a sommare 9000 *quadrato di* 300+2400 *doppio di* 300×40+160 *quadrato di* 40+5440 *doppio di* 340×8+64 q[illegible] di 8.

Intanto l'apposizione di tanti zeri introduce soventi volte non lieve confusione, perlochè considero potersi ciò con leggiera attenzione evitare. Rifletto sul quadrato 348 di poco prima, e trovo che si potrebbero togliere gli zeri, restando scarnati per così dire degli stessi in questo modo

9
24
16
544
64
———
121104

ed osservo che resta 9 quadrato di 3, 24 doppio di 3×4, 16 quadrato di 4, 544 doppio di 34×8, 64 quadrato di 8.

È facile dunque alzare a quadrato qualunque numero, con sommare *il quadrato della prima cifra* + *doppio della prima* × *per la seconda* + *quadrato della seconda* + *doppio delle due prime moltiplicato per la terza* + *quadrato della terza*.

E se fossero quattro figure si aggiungerebbero + *quadrato delle tre prime* × *per la quarta* + *quadrato della quarta*. Sempre però con l'indispensabile condizione di scriversi con ordinata scala, facendo sì che il secondo prodotto sopravvanzi il primo di una cifra sola, e di tutti si tiri la somma.

## § 6.

*Elevare a quadrato un numero di 4, o 5, o più cifre.*

*Sia il numero* 4538 *da elevarsi a quadrato.*
Si riuniscano in una somma
16 — *quadrato della prima cifra*
40 — *doppio della prima cifra × per la seconda*
25 — *quadrato della seconda cifra*
180 — *doppio delle due prime × per la terza*
09 — *quadrato della terza*
7248 — *doppio delle tre prime × per la quarta*
64 — *quadrato della quarta*

20593444 che è quadrato di 4538. Così di ogni altro esempio.

*Avvertimento.*

Avuto il quadrato di un numero, è facile avere il quadrato del numero seguente coll' aggiungere al quadrato avuto il doppio della radice e 1 dippiù: così a 49 quadrato di 7 aggiungendo 14+1 si avrà 64 quadrato di 8. Il quadrato in fatti di 8 diviso in 7 e 1 era uguale a *quadrato di* 7+ *doppio di* 7×1+*quadrato di* 1. Ma doppio di 7×1=14, e quadrato di 1 è sempre 1; dunque 49+14+1=64 quadrato di 8.

## § 7.

*Elevare le frazioni a quadrati.*

1. *Sia il rotto* $\frac{3}{4}$ *da elevarsi a quadrato.* Che si moltiplichi per se stesso, ossia $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}$: il suo quadrato sarà uguale a $\frac{9}{16}$ (§ 13. *tit.* 4). $\frac{20}{35}$ Così elevato a quadrato darà $\frac{400}{1225}$.
2. *Sia il rotto* 4 $\frac{2}{5}$ *da elevarsi a quadrato.* Esso si avrà col riunire il quadrato di 4+ doppio di 4 ossia $8\times\frac{2}{5}$+quadrato di $\frac{2}{5}$.
Ma il quadrato di 4=16
doppio di 4 ossia $8\times\frac{2}{5}$ ossia $\frac{8}{1}\times\frac{2}{5}=\frac{16}{5}$
ed quadrato di $\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$
dunque quadrato di 4 $\frac{2}{5}=16+\frac{16}{5}+\frac{4}{25}$. Sommati i rotti, dopo essersi ridotti all' istessa denominazione, sono uguali a $\frac{420}{125}$, e come rotto spurio è uguale 3 $\frac{45}{125}$ : dividendone i termini per 5=3 $\frac{9}{25}$, che uniti a' 16 fanno 19 $\frac{9}{25}$. Ecco il quadrato di 4 $\frac{2}{5}$
3. *Sia il rotto decimale* 3, 004 *da elevarsi a quadrato.* Esso

sarà uguale a 3, 004×3, 004. Che si moltiplichino fra loro come intieri (§ 4 *tit.* 5.) in questo modo

$$\begin{array}{r} 3004 \\ 3004 \\ \hline 12016 \\ 9012\phantom{0} \\ \hline 9024016 \end{array}$$

Si separino sei cifre, quanti di numero sono i decimali de' due fattori (§ 4 *tit.* 5.), ed il quadrato sarà 9, 024016.

## § 8.

*Riflessione 1.ª ancillare o preparatoria all' estrazione delle radici.*

I numeri composti di una o due cifre sono quelli che si comprendono da 1 a 99. Or 9 di questi numeri hanno una radice che moltiplicata per se stessa, li riproduce esattamente, e sono 1, 4, 9, 25, 36, 49, 64, 81, che hanno per radici rispettivamente 1. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Queste radici diconsi *radici vere*. Gli altri numeri non sono riprodotti dalla moltiplicazione delle radici sopra indicate; così 38 è vicino a 36, ma non è riprodotto nè da 6×6, nè da 7×7. Egli non può dire di avere una radice vera, ed allora si dirà di avere 6 per *radice prossima*, sicchè in questo caso anche nove sono le *radici prossime*: in fatti 1 è radice prossima di 2 e 3: 2 è *radice prossima* de' numeri che passano tra 9 e 16: 4 è *radice prossima de' numeri* tra 16 e 25, e così di mano in mano.

*Riflessione 2.*

I quadrati di 10, 100, 1000 etc. sono l'istessa unità seguita dal doppio degli zeri, ossia 100, 10000, 1000000 etc. Quindi il quadrato di un numero che abbia per radice una sola cifra non può cadere, che fra i quadrati di 1 e 10, *ossia* tra 1 e 100. Così tra i quadrati di 2 e di 3 si trovano tra 1 e 10, ed i quadrati di 4, 5, 6, 7, 8, 9 si trovano 10 e 100.

I quadrati de' numeri, che hanno due cifre alla radice, debbono trovarsi tra 100 e 10000.

I quadrati de' numeri, che hanno tre cifre alla radice, debbono trovarsi tra 10000 e 1000000 e così discorrendo pe' rimanenti.

*Riflessione 3.*

Dalle cose dette facilmente si rileva, che nel 100 gli zeri sono due e la radice de' quadrati in esso contenuti è di due cifre.

Nel 10,000 gli zeri sono quattro e la radice de' quadrati in esso contenuti è di due cifre.

Nel 1,000,000 gli zeri sono sei e la radice de' quadrati in esso contenuti è di tre cifre.

Così se gli zeri sono otto, la radice sarà di quattro cifre; se saranno dieci, la radice sarà di cinque ec.

Gli aritmetici avvedutamente dividono il numero, da cui si vuole estrarre la radice quadrata, in caselle a due a due, e dicono, che se le caselle sono 2, o 3, o 4, anche 2 o 3 o 4 ec. saranno le cifre della radice. Così

3,30 caselle due —— due cifre nella radice
48,21 caselle due —— due cifre nella radice
3,89,06 caselle tre —— tre cifre nella radice
89,35,67,89 caselle quattro— quattro cifre nella radice etc.

*Riflessione 4.*

Che si moltiplichi 24 per 24 ossia se ne ricerchi il quadrato

```
   24
   24
  ----
   96
  48
  ----
somma 5,76 quadrato di 24.
```

Che si divida 576 in caselle così 5. 76 : e si osservi, che il prodotto delle decine × per le decine ossia 2×2 quando si è eseguita la somma è caduto nella prima casella, e le due ultime cifre 76 non contengono nulla di questo quadrato di 2.

Sia il numero 43 elevato a quadrato sia col metodo *ordinario*, sia con quello di *composizione*.

Si divida il quadrato ottenuto 1849 a due a due, talchè diventi 18, 49. Fra lo spazio della virgola si alzi una linea di separazione, talchè tratta a perpendicolo in su, si cacci a sinistra il primo numero 16 quadrato di 4; e si abbia tutta l'operazione sott'occhio in questo modo

```
16|
 2|4
  |09
 -----
 18,49
```

Nell'elevare a quadrato il numero 43, e nel sommarne i rispettivi numeri che entrano alla elevazione dello stesso, osservo,

1. Che il quadrato di 4, ossia 16 è caduto nella casella 18, e nella casella stessa è caduto il 2 il quale 2 è un principio di 24 *doppio della prima cifra × per la seconda.*

Se da 18 dunque io ne sottraessi 16 quadrato di 4 mi resterebbe 2, che è un principio del doppio di 4 × per la seconda. Dal che sorge la regola generale « *Se dalla prima casella a sinistra si toglie il quadrato della prima cifra, resta una o due cifre che sono il principio del doppio della prima × per la seconda.*

Volgo novellamente l'occhio e la riflessione sul quadro istesso e veggo, che sommando i numeri della scala, il 24 cadeva parte nella prima casella e parte nella prima figura a sinistra della seconda casella, ossia in 184. Ma poichè dalla prima casella si è sottratto il quadrato della prima cifra, tutto il prodotto del doppio della prima moltiplicato per la seconda dovrà contener*si* nel residuo 2 ed in 4 prima cifra a sinistra della seconda casella; onde ne sorge la regola generale. *Il doppio della prima cifra × per la seconda si contiene nel residuo della prima casella* ( da cui si sottrasse il quadrato della prima cifra radicale ) *e nella prima cifra a sinistra della seconda casella.*

Continuo a riflettere sulla scala e prodotti dello stesso esempio ed osservo, che se il quadrato di 4 è caduto nella prima casella 18, il quadrato di 3 va a cadere nella seconda casella 49, e tutti e tre gli elementi del quadrato sono caduti complessivamente nelle due caselle insieme unite, ossia nel numero 1849. Tantochè se da questo io vado togliendo mano mano gli elementi parziali; ne avrò per risultato *zero.* Così da 18, prima casella, tolgo il 16: dal 2 residuo + 4 *prima cifra a sinistra della seconda casella* ossia 24, tolgo il doppio della prima cifra × per la seconda: e da 9 residuale tolgo 9 quadrato di 3: tutto il numero certamente si risolverà a zero. Dal che ne sieguono due regole generali.

1. *Tante sono le cifre delle radice, quante sono le caselle a due a due.*

2. *Un numero allora è vero quadrato, quando sottratti gli elementi parziali, l'operazione si riduce a zero: nel caso contrario, o l'operazione è malamente eseguita, o il numero non è vero quadrato.*

Similmente se da 79,21 quadrato di 89 dalla casella prima tolgo 64 quadrato di 8, poi da 15 residuo + 2 principio della seconda casella sottraggo il doppio di 8×9, e da 8 residuo+1, fine della seconda casella, sottraggo 81 quadrato della seconda cifra radicale, tutto anderà a parare a *zero.*

## § 9.

*Estrarre la radice da un numero composto da una cifra o da due.*

Se un numero è formato di uno o due cifre, si discerne se sia o no vero quadrato per mezzo della tavola pitagorica. Se il numero è quadrato, avrà la radice nella casella o verticale, o orizzontale che gli corrisponde: se non è vero quadrato, ma è uno degl'intermedi, avrà per radice l'istesso numero corrispondente in una delle due caselle, e si dirà *sua radice prossima*. L'uso però e l'esercizio non farà ricorrere a questo mezzo.

## § 10.

*Estrarre la radice quadrata da numeri composti di tre o quattro cifre.*

*Sia il numero* 625 *da cui vogliasi estrarre la radice quadrata.* Io divido tal numero in caselle a due a due cominciando da destra a sinistra, e sarà scritto 6.25. e sono avvertito da ciò, che due sono le cifre della radice (*riflessione* 3. § 8.). Indi dispongo il tutto come siegue:

| | | |
|---|---|---|
| | 6,25 | *Radice* |
| | 4 | 25 |
| | —— | —— |
| 4 | 22 | |
| 5 | 6,25 | |

e ragiono così: la prima casella contiene (*riflessione* 4. § 8.) la prima radice prossima, la quale non può essere che 2; io noto il 2 a destra dove mi ho fissato di notare le radici.

Or sottraendo dalla prima casella il quadrato di 2 mi resterà 2 di residuo, che certamente sarà il principio del doppio della prima cifra × per la seconda (*riflessione* 4. § 8.).

Se il 2 è il principio, il complemento si avrà col calare il 2 della seconda casella, e dirò 22 contiene il doppio della prima cifra × per la seconda. Ma se un numero contiene tante volte l'uno quante volte lo dice l'altro, si dice *prodotto*: dunque il 22 si deve considerare *come un prodotto della prima cifra radicale* × *per la seconda.*

Ma quante volte un prodotto è diviso per un fattore si ottiene l'altro nel quoziente: dunque dividendo 22 per il doppio della prima cifra radicale ossia per 4, se ne otterrà la seconda cifra nel quoziente, che sarà certamente 5.

Io noto il 5 *seconda cifra radicale* a destra della prima 2: e dirò 25 è la radice quadrata del numero 625.

Ma sarà radice quadratica vera, ovvero prossima del numero 625? Io posso facilmente discernerlo. Elevo a quadrato il 25 con uno de' due metodi prescritti, e sottrarrò questo quadrato da 625; e poichè il risultato è zero, io dirò che 25 è radice quadratica vera del numero 625.

2. *Sia un numero di quattro cifre* 4236 *da cui vogliasi estrarre la radice quadrata.*

Dispongo tal numero in caselle a due a due, e sono avvertito che due sono le cifre della radice (*riflessione* 3. § 8.) e dopo aver disposto il tutto come siegue:

| | | |
|---|---|---|
| | 42, 36 | *Radice* |
| | 36 | 65 |
| 12 | 63 | |
| 5 | 42, 25 | 69 |
| | — 11 | |

ragionerò in questo modo: la prima casella contiene la prima radice prossima, la quale non può essere che 6: io noto il 6 a destra dove mi ho fissato di notare le radici. Sottraggo dalla prima casella il quadrato di 6; mi resterà 6 di residuo, che certamente sarà *il principio del doppio della prima cifra* × *per la seconda.* Se 6 è il principio, il complemento lo darà il 3 della seconda casella e dirò « 63 contiene il doppio della prima cifra×per la seconda ». Ma se un numero contiene tante volte l'uno, quante volte lo dice l'altro, si dice *prodotto*: dunque 63 si deve considerare *come un prodotto o quasi prodotto della prima cifra* × *per la seconda.* Ma un prodotto se è diviso per un fattore, si ottiene l'altro nel quoziente: dunque dividendo 63 pel doppio della prima cifra radicale, ossia 12, se ne otterrà la seconda cifra nel quoziente, che sarà certamente 5. Io noto il 5 *seconda cifra radicale* a fianco del e dirò 65 è la radice quadratica del numero 4236.

Ma sarà radice vera o prossima? Io posso facilmente discernerlo. Elevo a quadrato il 63 con uno de metodi sopradetti e sottrarrò questo quadrato da 4236; e poichè il risultato è 4225, e sottratto lo stesso numero da 4236 dà per residuo 11, deduco che 6 è *radice quadratica prossima del numero* 4236.

## § 11.

*Estrarre la radice quadrata da qualunque numero*

Sia il numero 12359008, da cui si vuole estrarre la radice quadrata.

1. Si divida in caselle a due a due da destra a sinistra, come siegue

| | | |
|---|---|---|
| | 12, 35, 90, 08 | √ *Radice* |
| | 9 | 3515 |
| *doppio della 1 cifra* 5 | 33 | |
| 6 | 12, 25 | |
| *doppio delle due prime cifre* 70 | = 109 | |
| 1 | 12, 32, 01, | |
| *doppio delle tre prime cifre* 702 | 3 890 | |
| 5 | 12, 35, 52, 25 | |
| | 37, 83 | |

2. Si estragga la radice prossima 3 dalla prima casella: si sottragga il quadrato di 3 dalla stessa casella: si noti il residuo 3: al fianco si scriva 3 *prima cifra della 2 casella*: nel numero 33 si conterrà la cifra seconda della radice.

3. Si divida 33 pel doppio della prima radice ritrovata, e quoziente 5 sarà *cifra seconda* della radice.

3. Si trovi il quadrato di 35; si sottragga dalle 2 prime caselle: si noti il residuo 10: a fianco si cali 9 *prima cifra della prima casella*; in questo si conterrà la terza cifra della radice. radice.

4. Si divida 109 pel doppio delle due prime radici, e'l quoziente 1 sarà la *terza radice*, che si noti a fianco delle due prime.

5. Si elevi a quadrato il numero 351: si sottragga dalla tre prime caselle: si noti il residuo 389 si rafforzi questo *della prima cifra della quarta casella*: In questo si conterrà il doppio delle tre prime×per la quarta.

6 Si divida questo 3890 pel doppio dalle tre prime trovate radici, e'l quoziente 5 sarà la *quarta cifra* della radice.

7; Si elevi il quadrato 3515 e si sottragga dal numero pro-

posto; e poichè dà per residuo il numero 3782, si deduce esser 3515 radice prossima del dato numero 12359008.

Così di ogni altro numero divisibile in più caselle.

## § 12.

*Approssimare la radice di un numero non quadrato alla più vera che fosse possibile.*

Poichè non tutti i numeri sono quadrati perfetti, se ne deduce, che non tutti i numeri possono avere una radice vera, ossia tale che moltiplicata per se stessa li riproduca tali, quali essi sono. La radice di tali numeri è quella del più grande quadrato, che potessero contenere: essi oltre di questo quadrato, offrono alla fine dell'operazione un resto, soventi volte troppo sensibile. La scienza de' numeri propone allora di ravvicinare la radice alla più esatta che fosse possibile, di maniera che l'errore diventi o evanescente o almeno di sì esigua quantità da potersi trascurare senza notabile discapito: Per tale approssimazione della radice quadrata pe' numeri, che non sono veri quadrati, gli Aritmetici fanno ricorso all'aiuto de' decimali.

Che si riduca il numero *non quadrato* a decimale coll'aggiungere zeri alla sua destra. Ma quanti? Ecco un ragionamento da precedere alla risposta.

Se voi considerereste questo numero *non quadrato* addivenir quadrato coll'aggiunzione degli zeri, esso sarebbe al certo un prodotto della radice moltiplicata per se stessa. Ma il prodotto ne' decimali deve avere in se la riunione de' decimali de' due fattori; dunque questo numero dato dovrà avere *i decimali della radice + decimali della radice* ossia *il doppio de' decimali della radice*. Quanti zeri adunque debbono aggiungersi ad essere vero quadrato? Il doppio degli zeri, che voi assegnaste alla radice.

Laonde se la radice la vorreste *di decimi* ossia che il difetto dall' unità fosse di pochi decimi, e che perciò per natura de' decimali dovreste supporre uno zero a destra degl' intieri, al numero che concepiste quadrato voi ne assegnerete 2: se voi la vorreste di *centesimi* ossia che il difetto dall' unità fosse di pochi centesimi, e perciò sareste obbligati a concepire *due zeri* a fianco degl' interi, al numero che concepiste *quadrato* voi darete *il doppio di tali zeri ossia quattro*: e se vorreste la radice che difettasse di pochi millesimi, diecimillesimi ec. talchè dovreste concepire al fianco destro *tre zeri*, *quattro zeri* ec. al numero che concepiste quadrato di detta radice dovrete assegnare il doppio degli zeri, ossia *sei*, *otto* ec.

Ciò, se concepirete tal numero *vero quadrato*. Supponete ora, che non fosse tale; cesserebbe perciò contenere il più gran quadrato, che fosse possibile, in se stesso? E questo più grande quadrato possibile non dovrebbe costare de' sopradetti elementi? Anche nel caso dunque, che il dato numero non fosse vero quadrato, vale la regola di apporre *due*, *quattro*, *sei*, *otto zeri* ec. secondochè si voglia la radice di *decimi*, *centesimi*, *millesimi*, *diecimillesimi* ec.

Fornito de' convenevoli zeri il numero non quadrato, e passato perciò in forma frazionaria decimale, si sopprima la virgola; si dividano intieri e zeri in caselle, e si estragga le radice come ne' casi precedenti. E poichè a due caselle convengono due cifre radici, a tre caselle tre cifre radici, a quattro caselle quattro cifre radici ec. così dalla radice ritrovata si separino con una virgola tante cifre pe' decimali verso destra, quanto si è il numero delle caselle, in cui è stata divisa la seguela degli apposti zeri.

Vogliasi, ad esempio, approssimare le radice quadrata di 827 alla più vera, che fosse possibile, e propriamente a quella, che difettasse dall'unità di pochi millesimi.

Si riduca 827 a decimale con sei zeri appresso, e si divida in caselle e poi si operi, come se fossero intieri colle regole sinora addimostrate.

La radice sarebbe 28757: ma poichè deve essere radice d'intieri e decimali, conviene sequestrare le radici che appartengono agli intieri da quelle che appartengono a'decimali. E poichè le caselle son 3, dunque da 28757 si separino tre cifre a destra pe' decimali, e la radice approssimata sarà 28,757.

## § 13.

### *Estrarre la radice quadrata da un decimale.*

Che si renda il decimale di numero pari, se nol fosse, aggiungendo tre, cinque, sette zeri ec. secondochè si vuole la radice più esatta che fosse o a centesimi, o a millesimi, o a dieci millesimi ec. e diviso poi in caselle rispettive si estragga la radice, come ne' casi antecedenti.

Intanto o sarà vero decimale o decimale misto d' intieri e decimali.

### *Caso 1.*

Sia 0,00435 da cui si vuole trarre la radice quadrata a *millesimi* ossia che difetti dall' unità *di pochi millesimi.*

Si riduca a numero pari e si faccia 0, 00, 43, 50.

Si estragga la radice quadrata da 435, che sarà 66, e poichè le caselle erano tre, si metta 0 innanti al 66, e sarà 0,066 la sua radice quadrata prossima.

*Caso 2.*

Sia il decimale misto 42,003, da cui si voglia estrarre la radice quadrata.

Si riduca 42,003 a numero pari

42,00,30,00

estratta la radice 6479 si separino tre cifre per li decimali, quante sono le caselle superiori dopo gl'intieri 42, e la radice sarà 6,479.

## § 14.

*Estrarre la radice quadrata de' rotti.*

Siccome ad elevare un rotto a quadrato si deve moltiplicare il rotto per se stesso, come per esempio $\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{5\times5}{8\times8}=\frac{25}{64}$, che perciò bisogna elevare a quadrato sì il numeratore, che il denominatore, così ad estrarre la radice quadrata da un rotto, bisogna estrarre la radice quadrata sì dal numeratore che dal denominatore.

Quattro casi intanto possono darsi

O i rotti hanno sì nel numeratore che nel denominatore numeri, che sieno ambedue quadrati,

O il solo denominatore è quadrato,

O nè il numeratore, nè il denominatore è quadrato,

O sono intieri rotti, da' quali si vuol estrarre la radice quadrata. Noi li esamineremo partitamente, mutuando chiarezza e precisione dal chiarissimo *M. Bezout*, di cui riportiamo metodo ed esempj.

*Caso 1.*

*Sia il rotto* $\frac{25}{64}$, *da cui si voglia estrarre la radice quadrata.* Poichè sì il 25 che il 64 è quadrato, si estragga la radice da ambedue e $\sqrt{\frac{25}{64}}=\frac{5}{8}$. Così $\sqrt{\frac{81}{100}}=\frac{9}{10}$, $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$.

*Caso 2.*

Se il solo denominatore è quadrato e non lo è il numeratore, allora si riduca questo numeratore a decimale e se n'estragga la radice quadrata: passi questo per numeratore ad un rotto novello,

cui si dia per denominatore la radice di quel denominatore; che era quadrato.

*Sia* $\frac{2}{9}$ *di cui si vuole la radice quadrata.* Il 2 si riduca a 2,00, ovvero a 2,00,00, ovvero a 2,00,00,00. Si estragga la radice quadrata dal primo e sarà 1,.4; o si estragga dal secondo, e si avrà 1,41; o si estragga dal terzo e si avrà 1,414 ec. secondochè si vogliono *decimi* o *centesimi* o *millesimi* ec. Ciò fatto, si ponga per numeratore una di queste radici prossime 1,4 ovvero 1,41 ovvero 1,414 ec. e per denominatore 3 radice di 9; e la radice del rotto $\frac{2}{9}$ sarà una di queste $\frac{1,4}{3}$ ovvero $\frac{1,41}{3}$ ovvero $\frac{1,414}{3}$ per essersi così tratta la radice quadrata sì dal numeratore trasformato in decimale, che dal denominatore non decimale.

*Caso 3.*

Che se il denominatore non è quadrato, allora si moltiplichi sì il numeratore che il denominatore per l'istesso denominatore, perchè allora il denominatore addiverrà quadrato, e'l valore del rotto non si altererà (§ 7, *trasformazione* 2, *tit.* 4). Il caso diverrà come il precedente, e si eseguirà l'operazione, come si è indicata. *Sia* $\frac{3}{5}$ *da cui vuolsi trarre la radice quadrata.* Si moltiplichi $\frac{3}{5}$ per $\frac{5}{5}$, e 'l rotto $\frac{15}{25}$ avrà il denominatore quadrato. Si tragga la radice prossima da 15, ossia da 15,00, ovvero da 15,00,00, ovvero da 15,00,00,00 ec. e si avrà 3,8 ovvero 3,87 ovvero 3,872, e faccia uno di questi da numeratore, e per denominatore abbia 5 radice di 25, e la radice di $\frac{3}{5}$ sarà $\frac{3,8}{5}$ ovvero $\frac{3,87}{5}$ ovvero $\frac{3,872}{5}$.

Ma perchè intanto tollerare questa sorta di rotti ne' quali il numeratore è denotato da decimali e 'l denominatore da rotti ordinari? Non può le frase ridursi a frase interamente decimale? Che si divida perciò il decimale per 5

```
  5       3872
0,7744    35
          ----
           37
           35
          ----
            22
            20
          ----
            20
```

e il rotto $\frac{3,872}{5}$ sarà 0,7744 *diecimillesimi* radice di $\frac{3}{5}$.

*Avvertimento*

*Prevenzione, nell' estrarre la radice quadrata.*

Si è detto nell'indicare il modo di estrarre la radice quadrata (§. 10 *di questo titolo*) da un numero, che ritrovata la *seconda cifra radicale*, o la *terza* o la *quarta* ec: si debbono alzare a quadrato le *due*, le *tre*, le *quattro* cifre ec: e sottrarlo dalle due o tre o quattro caselle superiori. Ma può avvenire, che il quadrato sia superiore al numero espresso dalle caselle; converrà allora diminuire la radice di una o due unità ed anche di tre; se l' uopo il richieda. Così se le cifre ritrovate fossero 36, trovandosi superiore il loro quadrato, si scenderà a 35, ovvero 34 etc. come lo stesso uso insegnerà.

*Caso 4.*

Che se sono intieri e rotti da'quali si vuole estrarre la radice, allora si riducano gl' interi e rotti ad un sol rotto e si operi come sopra. Così volendosi trarre la radice da $8\frac{3}{7}$, si riduce $8\frac{3}{7}$ a $\frac{59}{7}$, (§ 9. *applicazione 4*, *titolo 4.*) Si moltiplichi sì il numeratore che il denominatore per 7 (*caso 3 antec.*) e si avrà $\frac{413}{49}$: ridotto a decimale il numeratore 413, con trasformarlo da 4, 13, 00, 00, 00, e poi tratta la radice quadrata, si avrà 20, 322, che passi a numeratore ed abbia per denominatore la radice di 49 ossia 7, e si avrà il rotto $\frac{20{,}322}{7}$, e dividendosi il numeratore per 7 si avrà 2,903 radice di $8\frac{3}{7}$.

Potrebbe ancora il rotto, che accompagna l' intiero volgersi in decimale, di cui gli zeri siano numeri pari, *ossia* o 4 *ovvero* 6, *ovvero* 8 ec. e da questo si tragga la radice. Così nell'esposto esempio il $\frac{3}{7}$ passi a decimale; dividendo 3, 00, 00, 00 ec. per 7, da cui se ne avrà il decimale 0,428571, e 'l rotto $8\frac{3}{7}$ sarà trasformato in 8,428571 da cui, tratta la radice, si avrà 2,903.

## § 15.

*Teoria del cubo.*

Se un quadrato si moltiplichi per la sua radice, il prodotto che ne risulta dicesi *cubo* come altre volte fu detto.

Alla formazione dunque del cubo vi è bisogno di una moltiplicazione di una cifra divenuta tre volte fattore, che perciò si dice *potenza terza*; così il cubo di $8 = 8 \times 8 \times 8$; il cubo di $9 = 9 \times 9 \times 9$.

## § 16.

*Teorema fondamentale.*

Sia 8 diviso in 5 e 3 nel modo che siegue:

8

5 3

Il cubo di 8 è uguale a $8 \times 8 \times 8$.

1. Io prendo a moltiplicare $8 \times 8$ non già per la terza cifra identica 8: ma per le sue parti 5 e 3: ed in vece di dire $8 \times 8 \times 8$, dico $8 \times 8 \times 5$, e $8 \times 8 \times 3$ in questo modo.

$$8 \times 8 \times 8 = \frac{8 \times 8 \times 5}{8 \times 8 \times 3}$$

2. Indi passo a suddividere le frasi $8 \times 8 \times 5$ e $8 \times 8 \times 3$ e considero il secondo 8 diviso in 5 e 3, ed in vece di dire e $8 \times 8 \times 5$ dico $8 \times 5 \times 5$, e $8 \times 3 \times 5$ e

$$8 \times 8 \times 5 = \frac{8 \times 5 \times 5}{8 \times 3 \times 5}$$

Così per la seconda frase diverrà

$$8 \times 8 \times 3 = \frac{8 \times 5 \times 3}{8 \times 3 \times 3}$$

3. Ripeto la stessa considerazione sopra ciascuna di queste frasi, e supponendo il primo 8 diviso parimenti in 5 e 3; io invece di dire $8 \times 5 \times 5$ ed $8 \times 5 \times 3$, dirò $5 \times 5 \times 5$, e $3 \times 5 \times 5$ in questo modo:

$$8 \times 5 \times 5 = \begin{matrix} 5 \times 5 \times 5 \\ \text{e} \\ 3 \times 5 \times 5 \end{matrix}$$

Così la seconda frase diverrà

$$8 \times 5 \times 3 = \begin{matrix} 5 \times 5 \times 3 \\ \text{e} \\ 3 \times 5 \times 3 \end{matrix}$$

Così la terza

$$8 \times 5 \times 3 = \frac{5 \times 5 \times 3}{3 \times 5 \times 3}$$

Così la quarta

$$8 \times 3 \times 3 = \frac{5 \times 3 \times 3}{3 \times 5 \times 3}$$

Ecco un albero di 8 rami di cui $8 \times 8 \times 8$ ne ha formato due; ciascuno di questi due si è suddiviso in altri due, formando così

quattro rami: ciascuno di questi quattro finalmente si è diviso in altri due, ed i rami sono divenuti otto nel modo che siegue

$$8\times8\times8=\begin{cases}8\times8\times5=\begin{cases}8\times5\times5=\begin{cases}5\times5\times5\\3\times5\times5\end{cases}\\8\times3\times5=\begin{cases}5\times3\times5\\3\times3\times5\end{cases}\end{cases}\\8\times8\times3=\begin{cases}8\times5\times3=\begin{cases}5\times5\times3\\3\times5\times3\end{cases}\\8\times3\times3=\begin{cases}5\times3\times3\\3\times3\times3\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

Finalmente rifletto su ciascuno degli otto rami, e trovo il primo essere 5×5×5 ossia *cubo* di 5: altri tre essere 3×5×5: 5×3×5, 5×5×3 che formano tre quadrati della prima parte 5 moltiplicati per la seconda parte 3: altri tre essere 3×3×5, 3×5×3, 5×3×3 che formano tre quadrati della seconda parte 3 moltiplicati per la prima 5; trovo finalmente l'ultimo ramo 3×3×3 ossia *cubo di* 3, e termino col conchiudere che il cubo di 8 è uguale a *cubo di* 5 + triplo del quadrato di 5×3 + triplo del quadrato di 3×5 + *cubo di* 3: e generalizzando la teoria su di ogni numero che si divide in due parti, dirò che il *cubo di un numero è uguale al cubo della prima parte, + triplo del quadrato della prima, × per la seconda, + triplo quadrato della seconda×per la prima + cubo della seconda.*

## § 17.

*Elevare a cubo un numero di due cifre.*

Dal numero semplice passiamo alla formazione del cubo di un numero composto. Sia 38 diviso in 30 ed 8. Esso sarà uguale a cubo di 30 + triplo del quadrato di 30×8 + triplo del quadrato di 8×30 + cubo di 8. Ora il cubo di 30 è uguale a 27,000: il triplo del quadrato di 30×8 è uguale 21600: il triplo del qua-

drato di 8×30 è uguale a 5760: ed il cubo di 8 è uguale a 512. Disposti dunque in questo modo

27000
21600
5760
512

*Si avrà la somma* 54872 *cubo di* 38

Intanto l'apposizione di tanti zeri introduce soventi volte non lieve confusione, per lo che considero potersi ciò con leggiera attenzione evitare. Rifletto sull'operazione eseguita nell'elevare a cubo 38, e trovo che si potrebbero togliere gli zeri restando soppressi gli zeri in questo modo

27
216
576
512

54872

ed osservo che resta
27, *cubo di* 3
216, *triplo del quadrato di* 3×8
576, *triplo del quadrato di* 8×3
512, *cubo di* 8.

44872

Perde forse il primo numero 27000 di valore? No, perchè nell' assegnare a' numeri l' ordine locale, si è dato al 27 il quarto luogo da destra a sinistra, ed il calcolatore può molto bene supplire con la mente i 3 zeri che per brevità si sono intralasciati. Così 21600 costando di due diecine di migliaja, di un migliajo, e sei centinaja, si è dato alle prime il quinto luogo, alle seconde il quarto, ed alle terze il terzo luogo, supplendosi con la mente i due zeri. Così 5760 costando di migliaja, centinaja, e decine, si assegnò alle prime il quarto luogo, alle seconde il terzo luogo, ed alle terze il secondo luogo. Finalmente 512, costando di centinaja, decine ed unità, si assegnò a ciascuno il suo posto secondo l'ordine. Vi si aggiunge un' altra brevità; in vece di dire cubo di 30, si può dire *cubo di* 3, assegnando al 27 il luogo che avrebbe avuto essendo agli zeri unito: in vece di dire triplo del quadrato di 30×8, si dirà *triplo del quadrato di* 3×8: in vece di dire triplo

del quadrato di 8×30, si dirà *triplo del quadrato di* 8×3 e l'operazione sarà più spedita e meno facile ad imbeversi di errori.

Sempre però con la indispensabile condizione di scriversi con ordinata scala i numeri, facendo sì che il secondo prodotto sopravvanzi il primo di una sola cifra, e di tutti poi si tiri la somma.

## § 18.

*Elevazione di un numero di tre cifre.*

Sia il numero 348. Io lo divido in tre numeri 300,40, e 8: indi mi occupo del solo cubo di 300 e 40, e questo l'avrò con riunire in una somma.

| | |
|---|---|
| *cubo di* 300 ——— | 27000000 |
| *triplo del quadrato di* 300×40 — | 10800000 |
| *triplo del quadrato di* 40×300 — | 1440000 |
| *cubo di* 40 ——— | 64000 |
| *Somma* | 39304000 *cubo di* 340 |

Indi considero il numero diviso in 340 e 8.

E poichè questo è uguale *a cubo di* 340+*triplo del quadrato di* 340×8+*triplo del quadrato di* 8×340+*cubo di* 8, debbo quindi elevare per le prime a cubo il 340; ma questa operazione posso ben risparmiarmela per averla già eseguita poco prima, quindi non dovrò che sottoscrivere all'aggregato 39304000 se non il *triplo del quadrato di* 340×8: + *triplo del quadrato di* 8×340 + *cubo di* 8 in questo modo

| | |
|---|---|
| | 39604000 |
| *triplo quadrato di* 340×8 | 2774400 |
| *triplo quadrato di* 8×340 | 65280 |
| *cubo di* 8 | 392 |
| | 42444072 |

E connettendo questa con quella scala, avrò disposte le parti del cubo di 340 così

| |
|---|
| 27000000 |
| 10800000 |
| 1440000 |
| 64000 |
| 2774400 |
| 65280 |
| 392 |
| 42444072 |

Si è notato frattanto, che l'apposizione di tanti zeri introduce sovente fiate confusione; quindi è meglio toglierneli dal calcolo, non recando la loro mancanza diminuzione per menomo valore; per quella regola, che si è accennata, di fare uscire ad ogni serie fuori una cifra, scrivendosi così

27
108
174
64
27744
6528
392

*Somma* 42444072 *cubo di* 348

ed osservo che resta
27 *cubo di* 3.
108 *triplo del quadrato di* 3×4.
174 *triplo del quadrato di* 4×3.
64 *cubo di* 4.
27744 *triplo del quadrato di* 34×8.
6528 *triplo del quadrato di* 4×34.
392 *cubo di* 8.

Dunque è facile alzare a cubo qualunque numero collo scrivere *cubo della semplice prima cifra*, + *triplo del quadrato della prima* × *per la seconda*, + *triplo del quadrato della seconda* × *per la prima*, + *cubo della seconda*, + *triplo del quadrato delle due prime* × *per la terza*, + *triplo del quadrato della terza* × *per le due prime*, + *cubo della terza*.

E se fossero quattro figure si aggiungerebbero + *triplo del quadrato delle tre prime* × *per la quarta*, + *triplo del quadrato della quarta* × *per le tre prime*, + *cubo della quarta*.

## § 19.

*Elevare a cubo un numero di quattro cifre.*

*Sia il numero* 6402, *che voglia elevarsi a cubo.*
Il suo cubo si avrà con riunire in una sua somma

216 —— *cubo di* 6
432 —— *triplo del quadrato* di 6×4
288 —— *triplo del quadrato di* 4×6
64 —— *cubo di* 4
0 —— *triplo del quadrato di* 64×0
0 —— *triplo del quadrato di* 0×64
0 —— *cubo di zero*
2457600 —— *triplo del quadrato di* 640×2
7680 —— *triplo del quadrato di* 2×640
08 —— *cubo di* 2

*Somma* 2623836808 *cubo di* 6402

## § 20.

### *Passaggio all' estrazione della radice cubica da qualunque serie di numeri.*

Dopo aver osservato gli elementi che compongono il cubo o potenza terza di un numero, è di mestieri indicare i modi, come estrarre da qualunque numero la sua radice cubica. All'ottenimento dello scopo prefisso, stimo giovevolissima cosa, o giovanetti, invitare la vostra attenzione alle riflessioni che sieguono.

*Riflessione* 1.

I cubi de' numeri semplici, come si disse, sono
1, 8, 27, 64, 225, 216, 343, 512, 729
*Radici cubiche* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
I cubi di 10, 100, 1000 ec. sono 10×10×10; 100×100×100; 1000×1000×1000 etc. ossia 1000,000,1000,000,000 ossia 1 *seguito da tre zeri*, 1 *seguito da sei zeri*, 1 *seguito da* 9 *ecc.*

*Riflessione* 2.

Se si dimanda » I cubi de' numeri di una cifra ossia de' numeri contenuti fra 1 e 10 in quale serie numerica cadranno? « E facile il precisarlo. I termini sono 1 e 10; or poichè il cubo di 1 = 1 ed il cubo di 10 è 10×10×10 ossia 1000; dunque i cubi de' numeri tra 1 e 10 cadono tra e 1 e *mille* ossia tra 1 e 1000.

» E i cubi de' numeri di due cifre, come 11, 28, 48, 89 etc. ossia de' numeri contenuti tra 10 e 100? » Lo preciserete, o giovanetti, al medesimo modo, che innanti. I termini sono 10 e 100: or poichè il cubo di 10 è 1000, ed il cubo di 100 è 1000, 000;

dunque i cubi di due cifre cadono tra *mille* e un *milione*, ossia tra 1000 e 1000000.

» Ed i cubi de' numeri di 3 cifre come 226, 896 etc. ossia de' numeri tra 100 e 1000? » Poichè il cubo di 100 è 1000,000, e 'l cubo di 1000 è 1,000,000,000; dunque il cubo de' numeri di 3 cifre deve cadere *tra un milione* e *mille milioni*, ossia tra 1,000,000 e 1000,000,000.

*Riflessione* 3.

Poichè i cubi de' numeri di una cifra cadono tra 1 e mille che porta *tre zeri*; quindi ogni *numero-cubo* di un numero di una cifra dovrà costare o *di tre cifre* come 225, 729 ec: o *di due* come 27 e 64 o *di una* come 1 e 8.

Poichè i cubi de' numeri di due cifre cadono tra *mille* e 'l *milione* che portano il minimo 4 cifre, inclusa l'unità, ed il massimo 6 cifre esclusa l'unità, ossia cadono tra 1000 e 999,999; quindi ogni cubo di un numero di due cifre avrà per lo meno 4 cifre e per ultimo 6.

Poichè il numero cubo di 3 cifre deve cadere tra il cubo 100 e 1000—ossia tra 1000000 e 1,000,000,000 che portano il minimo *sette cifre* inclusa l'unità, il massimo *nove* esclusa l'unità, ossia tra 1000000 e 999,999,999; dunque ogni cubo di un numero di 3 cifre avrà per lo meno 7 cifre e per ultimo 9.

Onde ne sorge questa osservazione

*Tre cifre al numero-cubo——una dalla radice*
*Sei al numero-cubo——due alla radice*
*Nove al numero-cubo——tre alla radice*

Perlochè se le cifre del numero cubo si dividano in caselle a tre a tre, si osserverà di leggieri tante dover essere le cifre della radice, quante sono le caselle in cui quello addivenne diviso.

*Riflessione* 4.

Sia il cubo del numero 64, così trascritto co' suoi elementi, come qui si osserva.

| | |
|---|---|
| 216 | |
| 43 | 2 |
| 2 | 88 |
| | 64 |
| A —— 262, | 144 |

Si divida il quadrato A in caselle a tre a tre, ciocchè indica due dover essere le cifre della radice cubica (*riflessione antecedente*). Fra l'una e l'altra casella si alzi a perpendicolo una linea, che si lasci a destra il 216, primo numero denotato. Pongasi occhio ed attenzione sullo schema e si osservi

1. Che, nel sommare le diverse serie, il cubo di 6 ossia 216 cadde nella prima casella a sinistra, talchè le cifre della seconda casella per nulla appartengono al resultato della prima. Che quindi si tolga il cubo della prima cifra dalla prima casella, ossia si tolga 216 da 261 e se ne otterrà il residuo 45 che è parte di altro prodotto.

2. Il triplo quadrato della prima cifra moltiplicato per la seconda ossia 432 è caduto parte nella prima casella, e con un sola cifra 2 è caduto nella casella seconda. Se uno quindi sommasse come giacciono

$$\begin{array}{r|l} 216 & \\ 43 & 2 \\ \hline 259, & 2 \end{array}$$

avrebbe il numero 2592 che conterrebbe il cubo della prima cifra + il triplo del quadrato della prima × per la seconda. Ma il cubo se ne è sottratto; dunque (*E qui si miri novellamente sullo schema antecedente pag.* 145) nel 46 a cui è aggiunto 2, ossia nel 461 si contiene il triplo del quadrato della prima × per la seconda.

3. Se 461 contiene il triplo quadrato della prima cifra × per la seconda, esso si deve considerare o come un prodotto o come un quasi prodotto de' due indicati fattori; ma quante volte un prodotto si divide per un fattore, al quoziente se ne avrà l'altro fattore, dunque dividendo 461 pel triplo quadrato della prima cifra se ne avrà la seconda; ecco *la seconda cifra radicale.* Dal che ne sorge la duplice regola generale.

1. *La prima cifra si estrae dalla prima casella.*

2. *La seconda cifra si ottiene dal residuo della prima casella, + la prima cifra della seconda casella, diviso pel triplo quadrato della prima cifra.*

### *Riflessione 5.*

Io elevo novellamente a cubo il numero 348 col metodo innanti esposto: divido in ternarii da destra il ritrovato cubo A: con-

tinuo a riflettere, come sull'esempio precedente, ed osservo, come prima, che

|  |  |  |
|---|---|---|
| 27 |  |  |
| 10 | 8 |  |
| 1 | 44 |  |
|  | 64 |  |
| 2 | 774 | 4 |
|  | 65 | 28 |
|  |  | 512 |

A —— 42, 144, 192

il cubo delle due prime cifre costava di 4 elementi cioè

*Cubo della prima cifra* ——27
*Triplo quadrato di* 3×4——108
*Triplo quadrato di* 4×3—— 144
*Cubo di* 4 —————————— 64

Ma nel sommare, tutti questi quattro prodotti sono caduti nelle due prime caselle; dunque nelle due prime caselle si contiene il cubo delle due prime cifre 3 e 4. Se dunque dalle due prime caselle ne sottrarrò il cubo delle due prime cifre, ne otterrò un resto espresso da 42144 *meno* il cubo di 34 ossia dà 42144 — 39304 = 2840.

Io aggiungerò a questo resto 2840 la prima cifra della terza casella, che è 0, ed il numero diverrà 28400 e dico ». In questo numero 28400 è caduto, quando eseguiva la somma, il numero 27744, che è il triplo delle due prime cifre ×per la terza.

4. Questo dunque contiene un numero quante volte lo dice un altro: esso è dunque un prodotto; e quali sono i fattori? *Il triplo quadrato delle due prime cifre e la terza.* Ma quando il prodotto si divide per un fattore, si ha nel quoziente l'altro fattore; dunque dividendo questo resto pel triplo quadrato delle due prime, si avrà 8 nel quozienle: *ecco la terza cifra radicale cubica.*

Così volendosi *la quarta cifra radicale* di un numero, basterà notare il residuo delle tre prime caselle diminuite del cubo delle tre prime cifre: rafforzarlo della prima cifra a sinistra della quarta casella: e finalmente dividerlo pel triplo quadrato delle tre prime; e così di ogni altro numero, che avesse alla radice 5, o 6, o 7 cifre etc.

## § 21.

*Epilogo delle riflessioni antecedenti.*

Sull' estrazione dunque del cubo osservo.

1. Tante essere le cifre della radice, quante le caselle a tre a tre in cui fu diviso il numero dato.

2. La prima radice, o cifra radicale, contenersi nella prima casella: le due prime cifre radicali nelle due prime caselle: le tre prime cifre radicali nelle prime tre caselle del dato numero etc;

3. La prima cifra ottenersi immediatamente dalla prima casella col consultarne il quadro 1,8,27,125 ec. (§ 20. *rifless.* 1.).

4. Dalla prima casella doversi togliere il cubo della prima cifra, delle due caselle il cubo delle due prime cifre, delle tre caselle il cubo delle tre prime cifre etc.

5. La seconda radice ottenersi dal dividere pel triplo quadrato della prima cifra radicale il resto del cubo della prima cifra, al quale sia aggiunto la prima cifra della seconda casella.

6. La terza cifra radicale ottenersi dal dividere pel triplo quadrato delle due prime radici il resto del cubo delle due prime radici sottratto dalle due prime caselle, al quale sia aggiunta la prima cifra della terza casella etc.

7. Elevato il cubo di tutto il numero, essere *radice* vera, se sottratto da tutte le caselle, si riduca il resultato a zero: essere *radice prossima*, se vi sia qualche resto.

## § 22.

*Estrarre la radice cubica da un numero divisibile in due caselle.*

*Sia il numero* 15903 *da cui si vuole estrarre la radice cubica.*

Che si divida in due caselle a tre a tre da destra: esso sarà diviso così

| | | 15, 903 | *Radice* |
|---|---|---|---|
| | | 8 | 27 |
| *Triplo del quadrato della prima* | 12 | 79 | |
| | 7 | 15, 903 | |

2. Che si estragga la radice cubica prossima da 15=2, e si sottragga il suo cubo da 15, notandosene il residuo 7: a fianco di questo si cali il 9, prima cifra della seconda casella, e si otterrà il numero 79.

Si divida 79 pel triplo quadrato della prima radice, e'l quoziente 7 sarà seconda cifra della radice (*riflessione* 4. *preced.*).

Si alzi in fatti a cubo il 27: si sottragga dalle due caselle del numero dato e si ridurrà l'operazione a zero: segno, che 27 *è radice cubica vera* del numero 15903.

## § 23.

*Estrarre la radice cubica di tre cifre.*

*Sia il numero* 401979178, *da cui si vuole estrarre la radice cubica.*

1: Si divida in tre caselle, come segue

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 111, 980, 178 | *Radice* |
| | | 64 | 482 |
| *triplo quadrato della prima cifra* | 48 | 479 | |
| | 4 | 110, 592 | |
| *triplo quadrato delle due prime cifre.* | 6912 | = 1, 3881 | |
| | 2. | 111, 980, 168 | |
| | | = = 10 | |

2. Si estragga 4 radice cubica prossima della prima casella 111: si sottragga il cubo di 4 da 111 e si noti il residuo 47, al di cui fianco si noti 9, *prima cifra della seconda casella*, talchè il numero addivenghi 479.

3. Si divida 479 pel triplo quadrato della prima radice 4, ossia si divida per 48, e'l quoziente 8 sarà *la seconda cifra della radice*, che si noti a fianco della prima 4. Si sottragga il cubo di 48 dalle due prime caselle e se noti il residuo 1,388, al cui fianco si noti 1 *prima cifra della terza casella*, talchè il numero addivenga 13881.

4. Si divida questo pel triplo quadrato delle due prime radici trovate 48 ossia per 6912, e'l quoziente 2 sarà *la terza cifra della radice*, col residuo 10, che però 482 è radice prossima del numero dato.

## § 24.

*Estrarre la radice di 4, di 5, di 6, cifre.*

Il metodo è l'istesso, che l'indicato, per le prime tre caselle. Si cali la prima cifra della quarta casella a fianco del residuo otte-

nuto per la sottrazione del cubo delle tre ritrovate cifre dal proposto numero, e si *divida pel triplo quadrato* delle tre prime cifre ritrovate etc. (§ 20. *rifless.* 4).

*Avvertimento generale.*

Avviene soventi, che diviso il resto del cubo della seconda o terza o quarta casella da cui si è sottratto il cubo delle due prime cifre, o delle tre ec: si ottenga un quoziente, che si crede essere la seconda, terza, o quarta cifra della radice; quando poi si eleva il cubo delle ritrovate cifre, si trova maggiore del numero proposto, da cui si deve sottrarre. Allora il quoziente si diminuisca di una unità, ò 2 unità etc: persino a che si ottenga il cubo sottrattore minore del numero sottraendo.

## § 25.

*Estrarre la radice cubica da' decimali.*

Due casi possono darsi; o sono puri decimali o decimali misti ad interi.

*Caso 1.*

Se sono puri decimali, si dividano a tre a tre, da sinistra a destra, e si estragga la radice cubica, come se fussero interi: badando sempre a far costare la radice di tanti decimali, quante sono le caselle, in cui le cifre del numero proposto siansi divise, e mancando cifre espressive si suppliscano con anteporre alle espressive gli *zeri*, come nel seguente

*Esempio.*

| 0. 000, 000, 000, 972 | *Radice* |
|---:|---|
| 729 | 0,0009 |
| — | — |
| 243 | |

Qui ho diviso il decimale da sinistra a destra: ho estratto la radice prossima 9 dalla casella che contiene le cifre espressive: e poichè quattro sono le sue caselle, di quattro cifre ho fatto costare il *decimale radice* col preporgli *tre zeri*, scrivendo così 0,0009.

Se i decimali sono misti ad interi, si dividano in caselle prima gli interi da destra a sinistra, e poi i decimali da sinistra a destra; e mancando cifre verso destra, suppliscansi col soggiungervi quanti *zeri* si vogliano sempre da formare caselle compiute di tre

zeri. Indi si estragga la radice cubica, come se il numero costasse di puri interi, e si faccia la radice costare di tanti decimali, quante sono le caselle in cui furono distribuiti i decimali.

*Sia da estrarsi la radice cubica del numero decimale* 42357. 89300032.

| | | |
|---|---|---|
| 1, *Divis.* 29 | 42, 357. 893, 005, 200 | *Radice* |
| — | 27 | 3. 493. |
| 4 | — | |
| 2. *Div.* 3468 | 153 | |
| —— | 30,304 | |
| 9 | ——— | |
| 3. *D.* 362403 | = 30538 | |
| ——— | 42, 168,549 | |
| 3 | ——— | |
| | = 1893440 | |
| | 41,630,064,157 | |
| | ——— | |
| | = 727, 828, 848 | |
| | ——— | |

Qui ho trovato la radice prossima 3493, ma poi ho separato col punto tre decimali, perchè tre sono le caselle in cui sono stati divisi i decimali.

## § 26.

*Approssimare alla vera, piucchè fosse possibile, la radice cubica di un numero non cubo.*

Poichè non tutti i numeri sono cubi, perciò non di ogni numero si può avere la radice cubica vera. Si è perciò che coll'aiuto de' decimali gli Aritmetici procurano renderla esatta per quanto più è possibile, o almeno tale, che fattasi possibilmente prossima alla vera, non rechi alterazione notabile nel resultamento del calcolo.

Che si risolva quindi il numero dato in decimale con aggiungergli a destra degli zeri. Ma quanti? Ecco un ragionamento da precedere la regola, che additerò.

Ognuno che si prefigge di approssimare una radice alla vera quanto più è possibile, deve certamente precisare alla chiesta approssimazione un limite determinato: deve, per esempio, decidersi

ad approssimarla in modo, che difetti dalla vera o in *decimi* ovvero in *centesimi*, ovvero in *millesimi*, ovvero in *diecimillesimi* ec.

Supponghiamo, che si decida ad approssimare la radice a tale che difetti dalla vera in *centesimi*: egli dirà a se stesso » voglio una radice, che dinoti centesimi ».

Se vuol centesimi alla radice, vuole implicitamente accresciuto il numero di due zeri; Ma il quadrato è *radice* ×*per radice* che secò porta la riunione degli zeri ossia 4 zeri, ed il cubo = *radice*×*radice*×*radice* vuole la riunione di tutti gli zeri de' fattori ossia 6 zeri; dunque egli al numero proposto, di cui vuole approssimar la radice, aggiungerà sei zeri.

Se vorrà la radice in millesimi aggiungerà nove zeri; se lo vorrà in *diecimillesimi* ne aggiungerà 12 etc.

Divida poi il numero, così corredato di zeri, in caselle a tre a tre, da destra a sinistra, ed estragga la radice cubica, come se il numero fosse intero: dalle cifre ritrovate ne separi e destra tante, quante sono state le caselle degli zeri aggiunti.

*Sia* 8755 *di cui si vuole approssimata la radice, che difetti per centesimi.*

Il numero 8755 si divida da sinistra in destra in caselle e diventi 8,755: si accrescano gli zeri, e diventi 8,755,000,000. Si tragga la radice cubica che sarà 2061. Si separino due cifre da destra per li decimali o sei zeri aggiunti, e se ne avrà 20,61 radice prossima a centesimi di 8755.

La radice non è vera, perchè non ha dato per residuo *z eri.*

## § 27.

### *Estrarre la radice cubica di un rotto.*

Ad avere un rotto a cubo, come fu notato, conviene elevarlo a quadrato e poi moltiplicarlo pel *rotto radice.* Così

Cubo di $\frac{8}{9} = \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9}$ ossia $= \frac{8 \times 8 \times 8}{9 \times 9 \times 9} = \frac{512}{729}$: cubo [illegible] ossia = [illegible] che diviso per 8 sì al numeratore che al denominatore = [illegible].

Volendosi dunque per lo contrario estrarre la radice cubica da un rotto, conviene estrarre la radice cubica sì dal numeratore che dal denominatore.

Quattro casi intanto possono darsi

O i rotti hanno numeri cubi ne' due loro termini,

O il solo denominatore è cubo,
O nè il numeratore, nè il denominatore è cubo,
O i rotti sono congiunti ad intieri.

### *Caso* 1.

*Sia il rotto* $\frac{216}{512}$ *da cui si vuol' estrarre la radice cubica.* Poichè sì il numeratore che il denominatore è cubo, si estragga la radice da ambedue, e si avrà $\frac{6}{8}$ radice cubica di $\frac{216}{512}$.

### *Caso* 2.

*Sia il rotto* $\frac{143}{343}$ *da cui si vuol estrarre la radice cubica.*

Poichè il numeratore non è cubo, si riduca a decimale che difetti dall' unità di centesimi, e ciò coll' accrescerlo di sei zeri e trasformarlo in 143, 000, 000. Se n' estragga la radice prossima cubica, uguale a 5, 22: si estragga poi la radice cubica 7 dal denominatore che è cubo, ed apponendo 5,,22, per numeratore e 7 per denominatore, si avrà $\frac{5,22}{7}$ *radice cubica del rotto* $\frac{143}{343}$.

Potrebbe il rotto $\frac{5,22}{7}$ ridursi in un solo decimale dividendo 5,22 per 7 ed ottenendosene 0, 74, che si può considerare una radice cubica di $\frac{3}{7}$ difettante dalla vera di centesimi.

### *Caso* 3.

*Sia il rotto* $\frac{3}{7}$, *da cui si vuole estrarre la radice cubica.*

Poichè nè il numeratore nè il denominatore è cubo, si moltiplichi sì il 3 che il 7 pel quadrato di 7 ossia per 49, e se ne avrà il rotto $\frac{147}{343}$, che certamente è dell' istesso valore di $\frac{3}{7}$ (§. 7. *trasfor: 1, tit. 4*). La radice prossima di 147,000,000 è 5,22: la radice cubica di 343 è 7; dunque la radice di $\frac{3}{7} = \frac{5,22}{7}$.

Che se questo rotto $\frac{5,22}{7}$ voglia ridursi a decimale col dividersi 5.22 per 7, allora si divida 5,22 per 7, e se ne avrà a quoziente 0,746 millesimi, radice di $\frac{3}{7}$.

### *Caso* 4.

*Sia* 7 $\frac{3}{11}$ *da cui si vuol' estrarre la radice cubica.*

Che si riduca ad un sol rotto (§. 9, *applicazione* 4. *tit.* 4) e poi si operi come nel caso antecedente.

Può ancora il $\frac{3}{11}$ ridursi ad un solo decimale 27272727 ec: col dividere il 3 per 11. Ma il decimale abbia tre volte tanto di quante cifre vogliansi alla radice. Nel caso nostro, se l' errore si volesse per millesimi, il decimale abbia 9 figure e sia 272727272 ed aggiungendo gl' intieri 7, la frase diverrebbe 7,272727272, da cui estratta la radice cubica si avrà 1,937.

# TITOLO VII.

## TEORIA DELLE RAGIONI E PROPORZIONI.

---

### § 1.

*Pregio ed eccellenza di questo titolo.*

Abbiamo sinora considerato i numeri non sotto altro aspetto che sotto quello dell' addizione e della sottrazione. Quattro si disse essere le operazioni fondamentali del calcolo de' numeri, Addizione, Sottrazione, Moltiplicazione, e Divisione. Ma che cosa è la moltiplicazione se non un' addizione abbreviata? Che cosa è la divisione se non una abbreviata sottrazione? Le operazioni quindi sinora trattate, con giusto rigore parlando, non si riducono che a due, Addizione e Sottrazione. L' istesso elevare a quadrato un numero, non è un' addizione di un numero con se stesso tante volte replicata, quante lo stesso numero il dice? E l'estrarre da un numero la sua radice quadrata o cubica non è una sottrazione si tante volte ripetuta da rinvenir poi la radice, che moltiplicata per se stessa l' avea formato? Ma i numeri non debbono solo calcolarsi coll' addizione e sottrazione effettiva. Alcuni effetti debbono indovinarsi diversamente che coll' addizione e colla sottrazione. Mi spiego — Io alzo il braccio, e non tocco la soglia del mio portone; dunque argomento, senza aver bisogno di vederlo col fatto, che chiunque posto nella medesima mia condizione voglia toccare la sommità del mio portone, debba essere più alto di me. Questo indovinare gli effetti senza aver bisogno di vederlo col fatto è superiore alla sfera dell' empirico e del sensibile: è più degno di nostra umana ragione. Quivi la nostra mente si fa partecipe dell' essere divino, ed appalesa la vera grandezza a cui dalla verità prima è chiamata: essa siegue un ordine logico, razionale, discorsivo nel cogliere gli effetti di un calcolo. E come ciò? col paragonare fra loro le grandezze, percorrerne le gradazioni, considerare il principio e l' estremo della scala numerica, in una parola, coll' osservare non solo i rapporti di un numero con un'altro, ma de' gruppi numerici con altri gruppi, di potenze con altre potenze coordinatamente po-

ste e distribuite. Tutto ciò si appara *nel titolo delle proporzioni*, sapremo del calcolo Aritmetico, e noi invitiamo la gioventù studiosa a far tesoro delle seguenti dottrine, se vogliano aver vanto di calcolatori e giudici delle cose.

## § 2.

### *De' rapporti di una grandezza con un' altra.*

1. Il paragone ed il nesso di un numero con un' altro dicesi *rapporto de' numeri.*

Per osservare il rapporto di 8 a 2, io debbo paragonare il numero 8 con 2, situandoli l' uno contra l' altro. Per segno dell' istituito paragone appongono i Matematici due punti tra mezzo alle quantità paragonabili; così scrivono 8: 2, pronunziando 8 a 2. Quivi 8 si dice *primo termine* e 2 si dice *termine secondo*; e con vocabolo più proprio 8 si dice *antecedente* e 2 *conseguente.*

Or in due modi io posso paragonare 8 con 2; o coll'osservare quante volte 8 contiene in se il numero 2 o coll'osservare di quanto 8 superi 2. Nel primo caso io dico » 8 *contiene* 4 *volte il* 2, nel secondo caso io dirò » 8 *supera* 2 *di* 6 *unità.*

L' effetto del primo paragone è 4.

L' effetto del secondo paragone è 6.

Ambedue questi effetti si dicono *quantità*, *esponenti*, *valsenti*, nomi che si usano indistintamente a significare gli effetti delle ragioni.

Compreso ciò, mutiamo i vocaboli noti in quelli particolari della scienza de' numeri.

Il paragone di due numeri dicesi *ragione.* Bisogna però distinguere: se si è istituito il paragone col vedere quante volte l'antecedente contenga il conseguente, la ragione dicesi *geometrica*, ed il suo esponente o valsente dicesi *esponente* o *valsente geometrico*: se poi si sia istituito il paragone ad osservare di quanto l'antecedente superi il conseguente, la ragione dicesi *aritmetica*, e l'eponente o valsente dicesi *esponente* o *valsente aritmetico.* Nell' esempio proposto 4 è l' esponente *della ragione geometrica* di 8 : 2: ma 6 è l'esponente della *ragione aritmetica di* 8 : 2.

Così l' esponente geometrico

$$\text{di}\quad \begin{aligned} 12:3&=4\\ 18:2&=9\\ 48:6&=8 \end{aligned}$$

Questa distinzione è necessaria e bisogna bene imprimerla nella mente. Preveniamo intanto, che in questo titolo noi non ci occuperemo, che della *ragione geometrica*.

## § 3.

### *Paragone di una ragione con un' altra.*

Conosciuto il modo come s'istituisce una ragione, passiamo a vedere i rapporti di una ragione coll' altra. Spesso la *quantità* o *esponente* di una ragione si paragona coll' *esponente* o *quantità* di un' altra per osservare se sieno o no eguali fra di loro. Così la ragione di $8:2$ posso paragonarla con quella di $12:3$. Elevo l'esponente geometrico di $8:2$, e lo trovo eguale a 4: elevo l'esponente geometrico di $12:3$ e lo trovo eguale parimenti a 4; ondechè conchiudo che la ragione di $8:2$ è uguale alla ragione di $12:3$, e se voglio esprimerla in iscritto, non farò altro che apporvi il segno di uguaglianza come siegue

$$8:2 = 12:3.$$

ovvero apporrò due punti in mezzo all' una e l' altra ragione così

$$8:2 :: 12:3$$

e pronunzierò

8 sta a 2 come 12 a 3

Quest' eguaglianza di due ragioni geometriche si dice *proporzione geometrica*.

## § 4.

### *Ragione geometrica maggiore o minore.*

Io paragono la ragione geometrica di $8:2$ con quella di $6:3$. L'esponente della prima è uguale a 4; quello della seconda è uguale a 2; perchè 8 contiene 4 volte il 2, e 6 contiene il 2 volte 3: conchiudo dunque, che la ragione di $8:2$ è maggiore della ragione di $6:3$ scrivendola $>$ così

$$8:2 > 6:3.$$

ossia *la ragione geometrica di* $8:2$ *è maggiore della ragione geometrica di* $20:4$.

Si paragoni d'altronde $8:2$ con $20:4$. Poichè l' esponente geometrico della prima è 4, e quello della seconda è 5; conchiuderò che la prima è minore della seconda e scriverò $8:2 < 20:4$.

ossia *la ragione geometrica di* $8:2$ *è minore della ragione geometrica di* $20:4$.

*Avvertimento.*

Ad aver l'uguaglianza delle ragioni, si paragonino i soli esponenti, non già le cifre o i termini delle stesse, addivenendo sovente che i termini sieno di enorme grandezza, ma gli esponenti sieno uguali; così sono troppo piccoli i termini 2: 1, e sono troppo grandi i termini di 90: 45, ma poichè gli esponenti sono 2 per ambedue, le ragioni debbo stimarle eguali, con tutto che disparità enorme passasse fra quelli.

## § 5.

### *Divisione delle ragioni geometriche.*

#### *Divisione 1.*

Spesso addiviene nelle ragioni geometriche, che mentre un' antecedente contiene il conseguente nella prima ragione, tutto al contrario l'antecedente della seconda non contiene; ma è contenuto nel suo antecedente; così paragonando 6: 3 con 4: 8 si osserva che mentre l'antecedente 6 contiene due volte il conseguente 3, tutto al contrario l'antecedente 4 è contenuto due volte nel conseguente 8. Così viceversa paragonando 5:20 con 10: 2, si trova, che mentre 4 è contenuto cinque volte in 2, per lo contrario 10 contiene 5 volte il 2.

In questo caso la ragione dicesi *inversa* oppure *reciproca*. Così si dice la ragione di 6: 3 è *inversa* o *reciproca* della ragione di 4: 8, e la ragione di 5 a 20 è *inversa* o *reciproca* di 8: 2.

Dicesi poi una ragione *diretta dell'altra* quando il primo antecedente contenendo il suo conseguente, il secondo antecedente contiene pari numero di volte anche il suo conseguente; e viceversa l'antecedente essendo contenuto nel suo conseguente nella prima ragione, nella seconda sarà l'antecedente pari numero di volte contenuto nel suo conseguente. Così la ragione di 6: 3 è diretta della ragione di 8: 4; e la ragione di 3: 12 è diretta della ragione di 6: 24, perchè se 6 contiene due volte 3, l'8 contiene 2 volte 4 nella prima ragione: e se 3 è quattro volte contenuto in 12, anche 6 quattro volte è contenuto in 24 nella seconda.

Evvi intanto un metodo assai pratico per distinguere le ra-

*gioni dirette dalle inverse o reciproche*, poichè se tutti e due gli antecedenti sono minori de' conseguenti, o tutti e due gli antecedenti sono maggiori de' conseguenti, le ragioni saranno dirette; così nel primo esempio sì il 6 che l' 8 sono maggiori de' conseguenti 3 e 4; e nel secondo sì il 3 che il 6 sono minori de' conseguenti 12 e 24. Ma se al contrario, mentre un'antecedente è maggiore del conseguente, l'altro antecedente è minore del conseguente; e viceversa, mentre un' antecedente è minore del suo conseguente, l' altro antecedente è maggiore del suo conseguente; allora una ragione si dice *inversa o reciproca dell' altra*. Così nel primo esempio, mentre 6 è maggiore di 3, il 4 per lo contrario è minore di 8; e nel secondo esempio, mentre 5 è minore di 2, l'8 per lo contrario è maggiore di 2. Le ragioni dunque si dividono in

*Ragioni dirette e*

*Ragioni reciproche o inverse.*

*Divisione 2.*

Io posso considerare 6 come esponente della ragione di 12 : 2, e lo posso considerare pure come un prodotto di 3 esponente di una ragione moltiplicato per 2 esponente di un' altra ragione. Queste ragioni potrebbero essere per esempio 12: 4 e 10: 5. Ecco il 6 sotto due aspetti: nel primo è un semplice esponente di 12: 2; nel secondo è un prodotto dell'esponente di 12: 3 moltiplicato per l' esponente di 10:5. Or la ragione di 12;6 considerata isolatamente si dice *ragione semplice*, perchè il suo esponente 6 risulta da una semplice divisione di 12 per 2; ma si dirà *composta* dalle due ragioni 12: 3 e 10: 5 quante volte il suo esponente 6 si considera come prodotto degli esponenti delle due dette ragioni.

Similmente la ragione di 24: 2 si dice *semplice*, se il suo esponente 12 si considera come un semplice quoziente di 24 diviso per 2; ma se il suo esponente 12 si considera come il prodotto di 2 esponente di 14: 7 ×per 6 esponente di 18: 3, la ragione di 24: 2 si dirà *composta dalle due ragioni* 14: 7, e 18: 3.

Le ragioni geometriche dunque si dividono in

*Ragioni semplici e*

*Ragioni composte*

*Divisione 3.*

Può avvenire, che tutti e quattro i termini della proporzione geometrica sieno gli uni diversi dagli altri, così nella proporzione

12 : 4 :: 15 : 5

si hanno termini, de' quali uno non è istesso che l'altro.

Può avvenire però, che ne' termini della proporzione geometrica vi sieno il secondo e terzo termine istessi fra loro; ma che mentre l'uno rappresenti il conseguente nella prima ragione, l'altro rappresenti per lo contrario l'antecedente nella seconda. Così nella proporzione

8 : 4 :: 4 : 2

vi sono 4 e 4 identici fra loro, ma 4 è conseguente nella prima ragione ed è antecedente nella seconda.

La prima si dice *proporzione discreta*.

La seconda si dice *proporzione continua*.

È da avvertirsi in tal caso, che i termini della proporzione *continua* non sono in sostanza che tre, ossia 8, 4, 2.

E con tre si scrive col fatto, facendo precedere alla stessa il segno ∺. Così

∺ 18, 6, 2 si pronunzia
18 *sta a* 6 *come* 6 sta a 2.

Le proporzioni dunque si dividono in
*Proporzioni discrete e*
*Proporzioni continue*

§ 6.

*Similitudine delle ragioni co' rotti o frazioni.*

Il valore di una ragione consiste nella *quantità* o *esponente*, e questo si ha (§ 2. *di questo titolo*) con dividere l'antecedente pel conseguente, così il valore della ragione di 6:2 è l'istesso che l'esponente di 6: 2 cioè 3.

Il valore di un rotto si ha (*tit.* 4, § 4.) con dividere il numeratore pel denominatore; se avessimo dunque il rotto $\frac{6}{2}$ il suo valore sarebbe parimenti 3, che si ha con dividere il numeratore 6 pel denominatore 3 ec.

Or se il valore di 6: 2 è uguale a 3, ed il valore di $\frac{6}{2}$ anche è uguale a 3, ne sorge che la ragione di 6 a 2 è uguale al rotto $\frac{6}{2}$.

Così si dimostra per ogni altro esempio e se ne deduce la regola generale.

*Ogni ragione si può trasformare senza perdita di valore in un rotto in cui l'antecedente faccia da numeratore ed il conseguente da denominatore.*

*Avvertimento.*

Si avvezzi il giovanetto al seguente raziocinio.

Il valore di 6: 2 $=$ 3; Il valore di $\frac{6}{2}=3$. Dunque all'istesso 3 è uguale tanto la ragione di 6: 2 quanto $\frac{6}{2}$; ma quelle cose che sono uguali ad una terza sono uguali fra di loro, dunque 6: 2 è uguale a $\frac{6}{2}$; così di ogni altra ragione.

## § 7.

*Vantaggi del suddetto principio generale.*

Da questo esposto principio sorgono due vantaggi.

1. Che è facilissimo indicare il valore di una ragione con esporla in forma frazionaria; così richiesto del valore di 9:3 si risponderà di essere $\frac{9}{3}$; richiesto del valore di 1322: 7 si risponderà di essere $\frac{1322}{7}$.

2. Secondo vantaggio si è, che nel calcolare le quantità delle ragioni, noi seguiremo le stesse regole che s'insegnarono nelle teorie de' rotti, ed acciocchè si vegga il parallello fra le teorie de' rotti, e quelle delle proporzioni geometriche, noi esporremo alcuni *principj fondamentali delle ragioni e proporzioni*, i quali principj nell' atto che faranno vedere l' analogia strettissima, che passa fra i rotti e le ragioni, saranno al tempo stesso la luce rischiaratrice di tutte queste belle nonchè giovevolissime teorie de' numerici rapporti.

## § 8.

*Principio secondo fondamentale.*

Si disse ne' rotti, che moltiplicandosi sì il numeratore che il denominatore di un rotto per uno stesso numero, non si altera il valore; così moltiplicando del rotto $\frac{3}{9}$ sì il 3 che il 9 per 4, se ne avrà un rotto $\frac{12}{36}$ dello stesso valore che $\frac{3}{9}$. Ma la frase frazionaria può trasformarsi in una ragione, e $\frac{3}{9}$ è l'istesso che la ragione di 3: 9, dunque moltiplicando sì l' antecedente 3 chè il conseguente 9 per 4, ne nascerà la ragione di 12 : 36 uguale alla ragione di 3: 9; chè in fatti se 12 è terza parte di 36, anche 3 è terza parte di 9. Dal che ne nasce la regola generale. *Moltiplicandosi sì l'antecedente che il conseguente di una ragione geometrica per un medesimo numero, non si altera il valore.*

§ 9.

*Principio terzo.*

Sia il rotto $\frac{9}{3}$ di cui si il numeratore 9 che il denominatore 3 si divida per 3; ne nascerà il rotto $\frac{3}{1}$ di cui non si è alterato il valore (§ 7. *trasfor.* 2. *tit.* 4). Ma il valore del rotto $\frac{9}{3}$ pel principio esposto è uguale a quello di 9: 3, dunque dividendo l'antecedente 9 ed il conseguente 3 per l'istesso numero 3, ne sorgerà la ragione di 3: 1 = a quella di 9: 3. Dal che ne nasce la regola generale che « *dividendo sì l'antecedente che il conseguente di una ragione per un medesimo numero, non si altera la proporzione.*

§ 10.

*Principio quarto.*

*Sia la proporzione* 8 : 4 :: 6 : 3.

Per dirsi ragioni eguali, la quantità di 8 : 4 deve essere eguale a quella di 6 : 3 ; dunque $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$ e ridotti allo stesso denominatore $\frac{8\times3}{4\times3} = \frac{6\times4}{4\times3}$ e soppresso il denominatore comune, resterà $8\times3 = 6\times4$. Ma 8 e 3 sono gli estremi e 4 e 6 sono i termini medii; dunque *in ogni proporzione discreta il prodotto de' termini estremi è uguale al prodotto de' termini medii.*

§ 11.

*Principio quinto.*

Sieno 12, 4, 6, 2 i di cui termini sieno tali, che il prodotto degli estremi sia uguale al prodotto de' termini medii, ossia $12\times2 = 6\times4$. Dividendo ciascuna ragione per $4\times2$ si avrà $\frac{12\times2}{4\times2} = \frac{6\times4}{4\times2}$ e tolti i moltiplicatori comuni da ambedue i rotti, ossia e 2 e 2 da' termini del primo rotto e 4 e 4 da' termini del secondo rotto, si avrà $\frac{12}{4} = \frac{6}{2}$, e volgendo le frasi frazionarie a ragioni si avrà 12: 4 :: 6: 2; dal che ne sorge la regola generale: *Se quattro termini sono sì tali, che il prodotto degli estremi sia uguale al prodotto de' termini medii, segno è che i termini sono proporzionali.*

*Avvertimento.*

Dunque di due ragioni si possono turbare in varii modi i termini rispettivi; ma resteranno sempre proporzionali, se i prodotto de' termini estremi sia uguale al prodotto de' termini medii. Laonde la ragione 12 : 4 : : 6 : 2 può dare le seguenti proporzioni.

4 : 12 :: 2 : 6
4 : 2 :: 12 : 6
12 : 6 :: 4 : 2
2 : 6 :: 4 : 12 etc.

E così di ogni altra proporzione.

## § 12.

*Principio sesto.*

Sia la proporzione di 12 : 3 :: 15 : 5

L'antecedente 12 è divisibile in 3+3+3+3 : se si aggiungesse il 3 al 12, ne risulterebbe 15 divisibile in 3+3+3+3+3: se si aggiungesse a 15 il 5 ne risulterebbe 20 decomponibile in 5×5×5×5×5 e siccome 3×3×3×3×3 contiene cinque volte 3, così 5×5×5×5×5 contiene cinque volte 5.

12+3: 3 :: 15+5: 5

Per consimil ragione 12—3: 3 :: 15—5: 5

*Sicchè in ogni proporzione se si paragoni la somma o la differenza dell' antecedente e conseguente coll' istesso conseguente, i termini resteranno proporzionali.* Il primo caso si dice *comporre,* il se- *differenziare le ragioni.*

## § 13.

*Principio settimo.*

Sia la proporzione 12 : 3 :: 32 : 8

*permutando ( avvert. del principio 4.)*

12 : 32 :: 3 : 8

*componendo ( principio 6. )*

12+32 : 32 :: 3+8 : 8

*di nuovo permutando*

12+32 : 3+8 :: 32 : 8

Mà 12+32 è la somma degli antecedenti e 3+8 è la somma de' conseguenti della proposta ragione; dunque in ogni proporzione sarà

*Somma degli antecedenti a somma de' conseguenti come un solo antecedente a un solo conseguente.*

## § 14.

*Principio ottavo.*

Sia la proporzione 32 : 8 :: 12 : 3

*permutando*

32 : 12 :: 8 : 3

*differenziando ( princip. 6 )*

32—12 : 12 :: 8—3 : 3

*novellamente permutando*

32—12 : 8—3 :: 12 : 3

*ossia*

*In ogni proporzione la differenza degli antecedenti sta alla differenza de' conseguenti come un solo antecedente ad un solo conseguente.*

## § 15.

### *Principio nono.*

*Sieno le ragioni semplici di* 4: 2 , 12: 3, 15: 5. Le loro quantità sono espresse da $\frac{4}{2}$, $\frac{12}{3}$, $\frac{15}{5}$.

Ora sovvenghiamoci che una ragione si dice composta da più ragioni, *quando il suo esponente equivale al prodotto degli esponenti o quantità delle altre ragioni*; sicchè se si trovasse una ragione che avesse per esponente il prodotto di $\frac{4}{2}$, $\frac{12}{3}$, $\frac{15}{5}$ si direbbe composta delle ragioni di 4:2, 12: 3, 15: 5 (§ 5. *divis.* 3. *questo tit.*). D'altronde qual'è il prodotto di $\frac{4}{2}$, $\frac{12}{3}$, $\frac{15}{5}$? certamente non altro che $\frac{4}{2}\times\frac{12}{3}\times\frac{15}{5}$ (§ 9 *tit.* 4.). Ma le moltiplicazioni de'rotti si fanno con moltiplicare numeratore per numeratore e denominatore per denominatore; dunque il vero prodotto sarebbe $\frac{4\times12\times15}{2\times3\times5}=\frac{620}{30}$; dunque quella ragione ha per esponente il rotto $\frac{620}{30}$ si dirà composta dalle ragioni di 4 : 2, 12 : 3, 15 : 5. Ma 620 è il prodotto di 4×12×15 ossia di tutti gli antecedenti e 30 è il prodotto di 2×3×5 ossia di tutti i conseguenti: dunque volete la composta di più ragioni semplici? moltiplicate tutti gli antecedenti e fatene un'antecedente; moltiplicate tutti i conseguenti e fatene un conseguente, ed abbiate per regola generale:

*Date più ragioni semplici, la composta di queste sarà espressa dal prodotto di tutti gli antecedenti al prodotto di tutti i conseguenti.*

*Avvertimento*

Se $\frac{4\times12\times15}{2\times3\times5}$ nasce dalle ragioni 4 : 2 , 12 : 3 , 15 : 5 , è facile indovinare le ragioni semplici che concorrono a formare una quantità scritta in forma frazionaria; e ciò col prendere un numero del numeratore, ed un'altro in corrispondenza del denominatore e formarne una ragione ; così

$\frac{7\times4\times5}{3\times5\times2}$ risulta dalle ragioni di 7: 3, 4 : 5 , 5: 2.

## § 16.

### *Principio decimo.*

Sieno i numeri 16 , 8 , 4 , 2.

Si consideri la ragione di 16 : 2 termini estremi della serie

data. Poichè moltiplicando sì l'antecedente che il conseguente di una ragione per un medesimo numero, non si altera il valore; quindi moltiplicando sì 16 che 2 per $8 \times 4$, il valore resterà sempre lo stesso; e si dirà che la ragione di 16 a 2 è uguale alla ragione di $16 \times 8 \times 4$ : a $8 \times 4 \times 2$. Ma quest' ultima ragione ha per esponente $\frac{16 \times 8 \times 4}{8 \times 4 \times 2}$ (*principio* 1. § 7.), e questa quantità nasce dalle ragioni di 16: 8, 8 : 4, 4 : 2 (*avver. antec.*), dunque la ragione di 16: 2 è composta dalle ragioni semplici di 16 : 8, 8 : 4, 4: 2. Dal che ne sorge la regola generale :

*Data qualunque serie di numeri la ragione del primo all' ultimo è composta dalle ragioni del primo al secondo, del secondo al terzo, del terzo al quarto etc.*

## § 17.

### *Principio undecimo.*

Il quoziente di 8 : 4, non è l'istesso che il quoziente di $\frac{1}{8}$ ad $\frac{1}{4}$; poichè 8 contiene 2 volte 4, ma $\frac{1}{8}$ non contiene 2 volte $\frac{1}{4}$; per lo contrario $\frac{1}{8}$ è contenuto 2 volte da $\frac{1}{4}$. Riducendoli in effetti $\frac{1}{8}$ ed $\frac{1}{4}$ alla stessa denominazione, diventano eguali a $\frac{4}{32}$ e $\frac{8}{32}$ ed ognuno vede che $\frac{4}{32}$ è metà di $\frac{8}{32}$.

Ciò premesso; se 8 è doppio di 4 ed al contrario $\frac{1}{8}$ è suddupolo di $\frac{1}{4}$, bisogna dire che 8 : 4 sta in ragione inversa di $\frac{1}{8}$: $\frac{1}{4}$, d'onde ne nasce il principio generale; *che ogni ragione può diventare inversa in due maniere, o col far passare il conseguente ad antecedente o coll' assegnare sì all' antecedente che al conseguente per numeratore l'unità e trasformarli in rotti; così la ragione inversa di* 8: 4 è quella $\frac{1}{8}$ : $\frac{1}{4}$. Mi piace a maggior vostro giovamento moltiplicare, o giovanetti, gli

### *Esempii.*

Sieno da trovarsi le ragioni inverse di 15 : 5
di 3 : 9
di 8 : 2

In due maniere possono formarsi tali ragioni inverse.

1. Per la prima ragione; 15 : 5 è *in ragione inversa* di 5: 15 ovvero 15: 5 è *in ragione inversa* di $\frac{1}{15}$ : $\frac{1}{5}$. In fatti ridotti questi rotti alla stessa denominazione risultano $= \frac{5}{75}$ : $\frac{15}{75}$ e mentre il primo 15 è triplo di 5, per lo contrario $\frac{5}{75}$ è suttriplo del suo conseguente $\frac{15}{75}$:

2. Nella seconda ragione; 3: 9 è *in ragione inversa* di 9 : 3

ovvero 3 : 9 *in ragione inversa* di $\frac{1}{3}:\frac{1}{9}$. In fatti ridotti alla stessa denominazione risulterà $\frac{9}{27}:\frac{3}{27}$. Or chi non vede che mentre nella prima ragione l'antecedente è suttriplo del conseguente, nella seconda ragione l'antecedente è triplo del conseguente ?

Finalmente 8 : 2 è *in ragione inversa* di 2: 8 o nel secondo modo 8 : 2 *in ragione inversa* di $\frac{1}{8}:\frac{1}{2}$; chè ridotti alla stessa denominazione, si avrà $\frac{2}{16}:\frac{8}{16}$ e chi non vede, che mentre 8 è quadruplo di 2, tutto per lo contrario, $\frac{2}{16}$ è suqquadruplo di $\frac{8}{16}$ ossia $\frac{1}{8}$ è suqquadruplo di $\frac{1}{2}$?

## § 18.

### *Principio decimosecondo.*

*Sia la ragione di* 24 : 3 *composta dalla diretta di* 16 : 1 *e dalla inversa di* 4 : 2. Poichè l'inversa di 4 : 2 equivale a quella di $\frac{1}{4}:\frac{1}{2}$ ne siegue che la ragione di 24 : 3 è composta dalla ragione di 16: 1 e di $\frac{1}{4}:\frac{1}{2}$. Ma la composta di due ragioni equivale alla ragione del prodotto degli antecedenti al prodotto de'conseguenti, (*princip.* 9.) dunque la ragione di 24: 3 è uguale alla ragione di 16 $\times \frac{1}{4}$ ad 1 $\times \frac{1}{2}$, ossia alla ragione di $\frac{16}{4}:\frac{1}{2}$. Ma 16 e 4 sono antecedenti, ed 1 e 2 sono i conseguenti delle ragioni semplici, dunque in questi due rotti si è diviso antecedente per antecedente e conseguente per conseguente; dal che ne sorge la regola generale:

*Se una ragione è composta da una diretta e da una reciproca, sarà uguale alla ragione dell'antecedente diviso per l'antecedente al conseguente diviso pel conseguente delle ragioni semplici.*

## § 19.

### *Principio decimoterzo.*

*Sia la proporzione discreta* 6: 4 :: 6: 3.

Se 8×3=24 (*principio* 4.) e 6×4=24, facilmente si osserva che alla formazione del 24 concorrono sì i fattori 8 e 3 che i fattori 6 e 4. Dato dunque 24 prodotto de' termini medii 6 e 4 e dato il fattore 8, è facile indovinare l'altro fattore estremo della serie data; imperciocchè è regola stabilita per lo innanzi, *che un prodotto diviso per un fattore dà nel quoziente l'altro fattore*; dunque 2×4 diviso per l'estremo 8 darà l'altro fattore estremo 3; dal che ne sorge la regola generale:

*Dati tre termini di una proporzione discreta, si avrà il quarto termine con dividere il prodotto del secondo e terzo termine pel primo termine; e dati tre termini secondo, terzo e quarto, s'indovinerà il primo con dividere il prodotto del secondo e terzo pel quarto.*

## § 20.

### *Principio decimoquarto.*

Dati 3 termini di una proporzione che fosse composta da una diretta e da una inversa, si troverà il quarto proporzionale con lo svolgere la ragione inversa in diretta, e poi moltiplicare il secondo termine pel terzo e'l prodotto dividerlo pel primo a norma di quello che fu esposto nel § *antecedente.* Così sia 8 : 4 nella ragione inversa di 6 : $x$.

Si svolga 8: 4 in 4: 8, e scriva 4: 8 :: 6; $x$. Indi $\frac{8 \times 6}{4}$ darà 12 quarto proporzionale, e si scriverà.

8: 4 *in ragione inversa* di 6 : 12

## § 21.

### *Principio decimoquinto.*

Che se la proporzione è continua come 8: 4 :: 4: 2; allora il prodotto degli estremi 8 e 2 sarà uguale a 4×4, ossia al quadrato di 4, onde ne nasce la regola generale. *In ogni proporzione continua il prodotto de' termini estremi è uguale al quadrato de' termini medii.*

Sicchè dato il primo ed il secondo termine della proporzione si determinerà il terzo *con dividere il quadrato del secondo pel primo*; così dato 8 e 4; si divida il quadrato di 4 per 8, e si ponga il quoziente 2 per terzo termine, e si dica» 8, 4 e 2 sono tre termini in proporzione continua.

Dall' istesso principio ne siegue che dati i termini estremi di una proporzione continua è facile ritrovare il termine medio 4; imperciocchè se il prodotto de' termini estremi è uguale al quadrato del termine medio; ed il prodotto di 8 × 2 ossia 16 uguale al quadrato del termine medio, è egli stesso un quadrato; ne siegue che da 16, *prodotto degli estremi*, rilevata la radice quadrata 4, sarà questo 4 il termine medio fra 8 e 2, scrivendosi nel modo seguente ∺ 8, 4, 2.

## § 22.

### *Esercizj pratici.*

1. Dati 1, 2, 3 quale sarà il quarto termine proporzionale? sarà $\frac{3 \times 2}{1} = 6$? (*principio 15.*).

2. Dati 100 e 25, quale sarà il terzo termine proporzionale? sarà 25×25 diviso per 100, ossia $\frac{625}{100} = 6\frac{25}{100} = 6\frac{1}{4}$ (*princip. 15*).

3 Dati 10000 e 100 quale sarà il medio proporzionale? sarà 10000 × 100, ossia 1000000 da cui si deve estrarre la radice quadrata, ossia 1000 (*princip. 15.*).

## § 23.

*Principio decimosesto.*

Sieno i due numeri 2 e 16 tra' quali si vogliono trovare due medii proporzionali.

*Primo termine medio.*

Fingiamo, che i medii proporzionali tra 2 e 8 fossero *m.* ed *n.* Si avrebbero quattro termini 2, m, n, 16 continuamente proporzionali. Ma la ragione del primo termine all'ultimo sta in ragione composta del primo al secondo, del secondo al terzo, del terzo al quarto etc. (*principio* 10. § 16.) dunque

$$2:16 \text{ sta in ragione composta di } \begin{cases} 2:m \\ m:n \\ n:16 \end{cases}$$

Ma le tre ragioni sono eguali; dunque invece di nominare le ragioni semplici con termini diversi fra loro, ci sarà permesso nominarle con termini identici e dire

$$2:16 \text{ in ragione composta di } \begin{cases} 2:m \\ 2:m \\ 2:m \end{cases}$$

Che si faccia una tale composta col paragonare il prodotto degli antecedenti al prodotto de' conseguenti (*princ.* 9. § 19.) e si avrà

$$2:16 \text{ come } 2\times2\times2 : m\times m\times m$$

*ossia*

$$2:16 \text{ come } 2^3 : m^3$$

Ma ad avere un termine estremo in una proporzione geometrica uopo è moltiplicare il secondo termine pel terzo ed il prodotto dividerlo pel primo (*princ.* 13. § 19.) dunque

$$m^3 \text{ quarto termine} = \frac{16\times2^3}{2}$$

Ma potenza terza divisa per la radice diventa potenza seconda ossia quadrato, dunque

$$m^3 = 16\times2^2$$

*ossia*

$$m^3 = 16\times4$$

*ossia*

$$m^3 = 64$$

e tratta la radice cubica da ambedue i termini, sarà

$m=8$—*ecco il primo termine medio.*

Ma 16 è un estremo de' due termini dati, e 4 è quadrato dell'altro estremo 2, dunque ne sorge la regola generale:

*Il primo medio proporzionale fra due numeri si ha col moltiplicare l'estremo a destra pel quadrato del primo termine e dal prodotto estrarre la radice cubica.*

**Secondo medio proporzionale.**

Se i termini fossero $2, m, n, 16$, si avrebbe

$$2:16 \text{ in ragione composta di } \begin{cases} 2:m \\ m:n \\ n:16 \end{cases}$$

ed identificando le ragioni con quella di n: 16, si avrà

$$2:16 \text{ in ragione composta di } \begin{cases} n:16 \\ n:16 \\ n:16 \end{cases}$$

*ossia*

$$2:16 :: n^3:16^3$$

*e traslocando le ragioni*

$$n^3:16^3 :: 2:16.$$

Ma il primo termine è uguale al secondo moltiplicato pel terzo e diviso pel quarto, dunque

$$n^3=\frac{16^3\times2}{16}$$

Ma la potenza terza divisa per la radice diventa potenza seconda; dunque

$$n^3=16^2\times2$$

*ossia*

$$n^3=16\times16\times2$$

*ed estraendo la radice cubica*

$$n=\sqrt[3]{16\times16\times2}$$

*ossia.*

*Il secondo medio proporzionale si ha col moltiplicare il quadrato dell' estremo a destra pel primo, e dal prodotto estrarne la radice cubica.*

*Avvertimento 1.*

Potrebbe ancora il secondo termine medio proporzionale ritrovarsi col considerarlo come terzo proporzionale in ordine al primo termine ed al medio ritrovato. Così trovato 4 primo medio proporzionale tra 2 e 16, si potrebbe tantosto istituire la proporzione.

$$2 : 4 :: 4 ; x = \frac{4 \times 4}{2} = 8$$ ( *principio* 15. § 21. )

Potrebbe dippiù il secondo medio proporzionale 8 considerarsi come medio tra il ritrovato 4 e 16 e sarebbe uguale a $\sqrt{4 \times 16} = \sqrt{64} = 8$ ( *principio medesimo* ).

*Avvertimento 2.*

Se i numeri dati però sieno tali, che non si potesse estrarre la radice cubica *dall' uno estremo moltiplicato pel quadrato del primo* senza ricorrere alle frazioni, allora riuscirà impossibile trovare i due medj proporzionali. Così dati 3 e 9; poichè da $9 \times 3^2$ ossia da 81 non può estrarsi la radice cubica, sarà impossibile rinvenire i medj proporzionali.

Si dica lo stesso se vuolsi trovare il medio proporzionale tra' due numeri, il cui prodotto non fosse quadrato. Così sieno i due numeri 2 e 5 tra' i quali si voglia trovare il medio proporzionale. Si moltiplichino fra loro gli estremi 2 e 5 e dal prodotto 10 si estragga la radice quadrata $3\frac{1}{6}$; allora gli i termini continuamente proporzionali sarebbero 2, $3\frac{1}{6}$, e 5, *ossia* $\frac{2}{1}$, $3\frac{1}{6}$, $\frac{5}{1}$ e riducendo $3\frac{1}{6}$ ad un rotto solo ( § 9, *applicazione* 4, *tit.* 4 ) diverrà $\frac{19}{6}$; e moltiplicando per 6 sì il numeratore che il denominatore de' rotti estremi, i rotti diverranno dell'istesso denominatore $\frac{12}{6}$, $\frac{19}{6}$, $\frac{30}{6}$. Soppressi i denominatori resteranno i numeri 12, 19, 30, che non sono proporzionali fra loro.

Perchè intanto ( a maggior dilucidazion dell' esempio ) la radice quadrata di 10 è $3\frac{1}{6}$? Ecco come. Da 10 tolta la radice quadrata 3, resta 1 di residuo. Questo dovrebbe dividersi pel doppio delle prima cifra radicale ossia per 6, se si volesse procedere al rinvenimento della seconda cifra; ma poichè l'operazione è arrestata per mancanza di cifre nel 10; la divisione che avrebbe dovuto eseguirsi, semplicemente si indica collo scrivere $\frac{1}{6}$ (a).

*Avvertimento 3.*

Tralasciamo altri principj che non menano alla soluzione di aritmetici quesiti, e ci affrettiamo alla piacevole applicazione de' già riferiti ed esposti.

(a) Ciò giustifica lo scolio 1 della proposizione 11 e scolio della prop. 12 Cap. 6. del chiarissimo *Paulini*, pag. 114 e 115.

# TITOLO VIII.

## APPLICAZIONE DELLE TEORIE PRECEDENTI A' CASI PRATICI DELL'UMANO COMMERCIO.

---

### § 1.

*Divisione delle quistioni che si sciolgono per mezzo delle ragioni e proporzioni.*

Eccovi finalmente, o giovanetti, al caso di poter sciogliere diverse spezie di speciosissimi quesiti, che ne' casi occorrenti dell'umana vita o nella investigazione delle verità scientifiche sogliono freqnentemente levarsi. Non prima del molto e necessario apparato delle materie trascorse poteva devenirsi da voi allo svolgimento e sviluppo delle quanto piacevoli, tanto intrigate quistioni, alle quali è necessità che meni la scienza dilettosa e sublime *del Calcolo.* Avevate bisogno infatti di divenire esperti nell'esecuzione rapida e sicura delle operazioni fondamentali: vi era d'uopo trattenervi nelle spinose trattazioni delle frazioni sia ordinarie sia decimali: vi dovevate liberare dagl'impedimenti che vi avrebbero porti i metodi non conosciuti di come trattar le potenze: vi era necessità indispensabile apparare le mutazioni cui soggiaceiono i numeri per cogliere i loro rapporti precisi, e per sino munirvi della speciale nomenclatura con cui distinguere i procedimenti opportuni al rinvenimento de' numeri incogniti. Ora di tutte armi e tutta analoga luce forniti, potete francamente entrare nel campo de' quesiti, a' quali la novità e l'interesse potentemente v'invita. Siate quindi alacri di cuore e di mente, chè a serii ed utili, nonchè dilettosi trattenimenti, l'Aritmetica *scienza de' meditativi* vi appella.

Comincerà essa dal proporvi alcuni *problemi*, o quistioni nelle quali da alcuni DATI conosciuti e determinati voi dovete, non dico congetturare ed intravvedere, ma dimostrativamente, con matematica certezza, fermare e profferire l'incognita.

I DATI cogniti e determinati risultano dalle circostanze fisse che si esprimono con numeri certi: l'incognita vien notata con una lettera alfabetica $x$; come sovente volte osservaste.

Ad introdurre chiarezza ed ordine nella sposizione di loro spezie e natura, noi li ridurremo alle otto classi che sieguono.

Problemi che si sciolgono colle proporzioni formate da ragioni semplici dirette ———————— *Regola del tre.*

Problemi che si sciolgono colle ragioni composte da due ragioni dirette fra loro ———————— *Regola del tre composta.*

Problemi che si sciolgono colle ragioni formate da ragioni semplici inverse ———————— *Regola del tre inversa.*

Problemi che si sciolgono colle ragioni composte da una diretta e da un' inversa ———————— *Regola del 3 composta inversa.*

Problemi, che si sciolgono col rinvenimento de' medii proporzionali ———————— *Regola degli usuraj.*

Problemi che si sciolgono col dividere un numero cognito in parti proporzionali ad altri numeri cogniti ——— *Regola di società semplice e composta.*

Problemi che si sciolgono col precisare le parti di un numero cognito che sieno proporzionali alle differenze di altri numeri cogniti ———————— *Regola dell' Alligaz.*

Problemi che si sciolgono col dividere un numero *vero* in parti proporzionali alle parti di un numero o di due numeri *finti* ———————— *Regola della posizione falsa.*

Noi parleremo partitamente di ciascheduna classe.

## CLASSE I.

### § 2.

*Problemi che si sciolgono con le ragioni dirette fra loro, ossia regola del tre semplice..*

Prima di venire alla soluzione di siffatti problemi d'uopo è fissare il modo come distinguere le ragioni dirette; ed a maggior comprendimento della cosa, stimo a proposito non solo spiegare la teoria con lo svolgere per tutti i versi il problema che siegue; ma coll' aggiungervi e trascrivere altri graziosi esempj, che dalla mia *Aritmetica pratica*, stampata nel 1835, e da altri precisi e rinomati spositori di aritmetici problemi avemmo cura trascegliere.

*Esempio 1. — Per mietere un campo di 40 moggi bastarono un giorno 95 mietitori: per mietere un campo di* 325 *moggi di misura, quanti mietitori saranno necessarj?* Qui bisogna distinguere quattro termini.

1. *Campo mietuto* = ———————— 40 *moggi.*
2. *Campo da mietersi* = ———————— 325 *moggi.*

3. *Uomini impiegati al primo campo* = 95.

4. *Uomini da impiegarsi nel secondo* **campo - termine ignoto** che per ora denoteremo uguale ad $x$.

Indi elevo il seguente raziocinio. Se il campo accresce, il numero de' mietitori accrescerà; se il campo diminuisce, il numero de' mietitori diminuirà: dunque secondo quel che si disse nel § 5. *tit.* 7. *divis.* 1.) *la ragione de' campi è diretta della ragione de' mietitori.*

Scriverò poi le due ragioni l'una appresso l'altra

$$40 : 325 :: 95 : x$$

**E mi persuado che questo termine $x$ dovrà portare un numero di mietitori maggiore di 95.**

**Fissata la proporzione formata da due ragioni semplici, l'una diretta dell'altra, io passo a ritrovare il quarto che per ora mi è incognito, ed io già notava con $x$. E dico » *io ho tre termini* 40, 325, 95, *quale sarà il quarto proporzionale?***

**Gli aritmetici esprimono questa dimanda con un segno interrogativo 40: 325 :: 95?**

**Ricordandomi che nella proporzione diretta, ad avere il quarto termine, uopo è moltiplicare il secondo per il terzo e dividerlo pel primo ( *principio* 13. § 19. ) io moltiplicherò 325. per 95 ed il prodotto 30875 lo dividerò per 40, e ne avrò per quoziente 771 mietitori e $\frac{35}{40}$ di un mietitore, che ridotto a minimi termini equivale a $\frac{7}{8}$ e scriverò allora la risposta al problema non più con l'apporre l'$x$ termine vago e generale. ma con lo scrivere per quarto termine 771 e $\frac{7}{8}$ in questo modo**

$$40 : 325 :: 95 : 771 \text{ e } \tfrac{7}{8}$$

**Se vi si dimanda a che equivale il $\frac{7}{8}$ di un mietitore? potrà forse dividersi in parte il lavorante? Qui si risponde che il mietitore si suppone come una forza di 8 gradi; onde il vero mietitore dovrebbe avere $\frac{8}{8}$ di forza ossia tutta la forza; ma uno di questi dovrebbe avere un grado meno di forza e faticherebbe con sette parti ottave dell'ordinaria forza.**

**Il calcolo però è tutto matematico, che suppone eguaglianza di forza, eguaglianza di tempo, egualità di circostanze e simili; ciocchè in natura non si verifica. Può verificarsi però a vantaggio del padrone del campo coll'impiegare il ritrovato numero di mietitori e farli faticare qualche ora di più in compenso de' mancamenti cagionati dalla diversità delle circostanze, o in favore de' mietitori**

con alzare falce dal campo e restare il pochissimo residuo alla giornata seguente.

*Esempio 2. — Per vestire 1227 soldati, si sono spesi ducati 7892; per vestirne 729, quanto si spenderà?*

Quì i soldati accrescono ed il danaro da spendere accresce; i soldati diminuiscono ed il danaro da spendere diminuisce; *la ragione dunque de' soldati è diretta di quella delle spese.*

Si scrivano quindi in modo, che i primi soldati stiano a' secondi soldati, come la prima spesa alla seconda spesa che si cerca;

*ossia*

$$1227 : 7892 :: 729 ? \text{ al quarto.}$$

Si moltiplichi poi il secondo pel terzo termine e 'l prodotto 5753268 si divida pel primo termine 1227, e se ne avrà per quoziente 4688 $\frac{1092}{1227}$, *quarto termine cercato.*

La risposta dunque si scriva così

$$1227 : 7892 :: 729 : 4688 \tfrac{1092}{1227}.$$

*Esempio 3.*=72 *rotola ed* $\frac{3}{4}$ *di lino si sono commutati con* 27 *tomola ed* $\frac{2}{7}$ *di derrata. Quante derrate ci bisogneranno pel compenso di* 82 *rotola e* $\frac{1}{8}$?

Si scriva $72 \frac{3}{4} : 27 \frac{2}{7} :: 82 \frac{1}{8}$ al quarto.

Si riducano in forma frazionaria ( *titolo* 4. § 9. *appl.* 4. ), e diverranno prima $\frac{291}{4} : \frac{191}{7} :: \frac{657}{8}$ : *al quarto*, e di poi moltiplicando il terzo pel secondo, e dividendo il prodotto $\frac{125487}{56}$ pel primo termine $\frac{291}{4}$, ossia moltiplicando $\frac{125487}{56}$ per $\frac{4}{291}$ (*tit.* 4. § 14.), si avrà $\frac{501948}{16296}$=30 $\frac{13068}{16296}$ di derrata.

## CLASSE II.

## § 3.

*Problemi, che si sciolgono colle ragioni composte da due ragioni dirette fra loro ossia regola del 3 composta da due dirette.*

Nella regola antecedente si sono considerati i termini come assoluti ed in dipendenti da ogni altro, talchè nell' enunciarsi la quistione, non si sono enumerati che tre termini: Così 7 *uomini*, 80 *lavoratori*, ec. Avviene però alle volte, che ciascun antecedente sia accompagnato da qualche circostanza come di tempo, *lun-*

*ghezza*, *velocità* ec. talchè nell'enunciarsi la quistione, si enumerano tanti termini quante sono le circostanze o condizioni espresse. La regola dicesi allora *composta* da'rapporti delle intervenute condizioni o circostanze.

**E quante sono le ragioni che le compongono? Quanto sono le condizioni** che variano ne' diversi casi. Così se tre uomini fatigano per 3 ore e con 7 gradi di forza, la quantità di loro lavoro è in ragione delle ore e de' gradi di forza; e se altri fatigano per 3 ore e 7 gradi di forza e con istrumenti migliori, la quantità di lavoro sarà composta dalle ragioni delle ore, de'gradi di forza, e della perfezione degl'istrumenti.

Ciò premesso, occupiamoci del modo come risolvere i problemi di tal natura.

Ricordiamoci chè sia ragione composta, e come si formi la stessa ragione composta. Si disse esser *ragione composta* quella il di cui esponente risulta da altri esponenti di altre ragioni semplici moltiplicati fra loro (§ 5. *tit. anteced. divisione* 3.).

Così la ragione di 24: 3 si disse composta dalle ragioni di 16: 4 e di 10: 5, perchè la ragione di 24: 3 ha per esponente 8, il quale 8 è uguale al prodotto di 4 esponente di 16: 4 e di 2 esponente di 10: 5.

Circa la formazione di una ragione composta, si disse ottenersi col paragonare il prodotto degli antecedenti al prodotto de' conseguenti (*principio* 9. *tit.* 7.). Così date le due ragioni 16: 4 e 10: 5 è facile indovinare qual sia la ragione composta dalle indicate ragioni, e ciò col paragonare il prodotto degli antecedenti 16 e 10 al prodotto de'conseguenti 4 e 5: sicchè la composta sarà 160: 20. Ed in fatti 160: 20 non ha per esponente 8 come lo ha 24: 3?

Ciò premesso vediamo come nella pratica dell'umano commercio la ragione composta si verifichi. Esaminiamo un problema riportato nella sua Aritmetica dall'Abate *Vito Caravelli*.

*Con sette mortaj si sono buttati in una piazza assediata, in 3 ore, 84 bombe; si cerca sapere, in 4 ore con 18 mortaj quante bombe nell'istessa piazza si butteranno?*

Quivi uopo è distinguere le condizioni date da quelle che sono ignote coll'ordine che siegue

| | |
|---|---|
| *Num. de' primi mortaj* | 7 |
| *Num. de' secondi mortaj* | 18 |
| *Tempo primo* | 3 |
| *Tempo secondo* | 4 |
| *Num. delle bombe prime* | 84 |
| *Num. delle seconde* | $x$ |

Questo numero che si cerca che noi denotammo $x$ non sarà certamente 84, perchè le condizioni del primo numero sono mutate, non essendo cioè più 7 il numero de'mortaj, ma 18; e non più 3 ore il tempo, ma 4. Uopo è dunque paragonare 84 con $x$ col mettere in considerazione la ragione de'tempi mutati, nonchè la ragione degli accresciuti mortaj, e dir praticamente come siegue » se i mortaj accrescono, il numero delle bombe anche accresce; se i mortali diminuiscono, anche il numero delle bombe diminuisce; dunque *i numeri delle bombe sono in ragione diretta de' numeri de' mortaj* ossia numero di bombe : a numero di bombe :: 70: 18. Similmente se il tempo accresce, il numero delle bombe accresce; se il tempo diminuisce, il numero delle bombe diminuisce; dunque i *numeri delle bombe sono in ragion diretta de' tempi* 3 *ed* $x$.

Ma i numeri de' mortaj e delle ore influiscono nel medesimo tempo alla diversità del numero delle bombe; dunque il numero delle bombe è *in ragione diretta del numero de' mortaj, e del numero delle ore:* ma i numeri delle bombe sono 84 ed $x$, e la diretta de' mortaj è 7: 18; e la diretta de'tempi è 3:4; dunque 84 : $x$ è in ragione composta di 7: 18 e di 3:4.

Ma qual'è la composta di 7: 18 e 3: 4? è appunto quella del prodotto degli antecedenti 7 e 3 al prodotto de' conseguenti 18 e 4. Realizzando le moltipliche si avrà 84: $x$ :: 21: 72, e viceversa 21: 72 :: 84 : $x$.

Semplicizzata così la proporzione, è facile trovare il valore di $x$, ossia del quarto proporzionale. Moltiplicate in fatti il terzo termine 64 pel secondo 21, e dividete il prodotto pel primo 72, e voi avrete per quarto proporzionale 288, che dinoterà il numero che si chiedeva, cioè il numero delle bombe che farebbero 18 mortaj in 4 ore.

*Esempio 2.—47 fabbricatori in 9 giorni distendono 400 palmi di muro alto 3 palmi, quanti ne distenderebbero 50 in 12 giorni, supposto in ambedue i casi medesima l'altezza del muro?*

Qui più sono i fabbricatori, più saranno i palmi; di meno i fabbricatori, di meno ancora i palmi; *la ragione dunque de' palmi è diretta di quella de' fabbricatori.* Sicchè il numero de' 400 palmi sta ad $x$, numero de'palmi che si cerca, *in ragione diretta de' fabbricatori* 47 : 50.

Similmente più è il tempo, maggiore sarà il numero de'palmi, minore il tempo, minore il numero de' palmi; *la ragione dunque de' palmi è diretta di quella de' tempi*, ossia *il numero di* 400 *palmi: sta ad* $x$, *numero che si cerca, in ragione diretta di* 9: 12 *giorni.*

| | |
|---|---|
| Sicchè la ragione di 400: all' incognito $x$ è composta. | *dalla diretta di* 47 : 50, *e dalla diretta di* 9 : 12 |

Si moltiplichino gli antecedenti delle due ragioni, ossia 47 per 9 e 50 per 12, e si avrà 400: *quarto* :: $47 \times 9$ : $50 \times 12$: ed effettuando le indicate moltiplicazioni, si avrà 400: all' incognito : 423 : 600, e commutando si avrà 423 : 600 :: 400 : all' incognito.

Si moltiplichi il terzo termine pel quarto e'l prodotto 240000 si divida per 423, e se ne avrà 567 [illegible] con un rotto che si trascura. Sarà 567 il *quarto termine cercato*.

## CLASSE III.

### § 4.

#### *Problemi che si sciolgono con le ragioni inverse o reciproche fra loro.*

*Ragione inversa* si disse quella che offre un'opposizione diretta ad un altra nel paragone di sua quantità come si disse (§ 5. *tit.* 7.).

Così la ragione di 6:3 è inversa della ragione di 3: 6 o di altra sua pari; perchè mentre il 6 contiene due volte il 3, nella ragione opposta il 3 è due volte contenuto dal 6. Così la ragione di 4: 12 è inversa della ragione di 24: 8 perchè 4 è 3 volte minore di 12, mentre per lo contrario 24 è tre volte maggiore di 8.

Si disse pure che è facile distinguere se una ragione è inversa dell'altra, perchè in una proporzione composta da due ragioni inverse fra loro, accade tutto al contrario di quello che accadrebbe in una proporzione composta da due ragioni dirette. In fatti nelle dirette si verifica » che il primo antecedente accresce ed il conseguente diminuisce; ed il secondo antecedente parimente accresce, mentre il suo conseguente diminuisce e viceversa. Ma nelle inverse avviene, che uno accresce e l' altro diminuisce; mentre l'uno diminuisce e l'altro accresce nella seconda ragione, come dagli esempj colà distesamente riferiti.

Ora ragioniamo sull' esempio che siegue.

» Per poter cavare un fosso intorno un opera di fortificazione » vi bisognano per tre mesi 80 uomini, si cerca quanti uomini vi » bisogneranno per poterlo scavare in 15 giorni » ?

Quivi abbiamo due tempi a considerare, 3 mesi ossia 90 giorni tempo impiegato nella prima operazione, e giorni 15 tempo da impiegarsi nella seconda : abbiamo dippiù due numeri di uomini, 80 uomini cioè che si impiegarono nella prima operazione, e gli altri ancora ignoti che dovransi impiegare nella seconda, quali a maggior chiarezza si notano come siegue.

*Tempo* 1 —— 90
*Tempo* 2 —— 15
*Uomini* 1 —— 80
*Uomini* 2 —— $x$

Ciò premesso, s'istituisca il seguente raziocinio » Se il tempo cresce, gl'uomini dovranno essere di numero minore; se il tempo diminuisce, gli uomini dovranno essere di numero maggiore » Ma (?) quando uno accresce e l' altro diminuisce, uno diminuisce e l' altro accresce, è indizio di star le ragioni inversamente fra loro; dunque *la ragione de' giorni* 90 *a' giorni* 15 *è inversa della ragione degl' uomini* 80 *ad* $x$. Si disponga dunque così la proporzione,

90: 15 *inversamente* di 8 : $x$.

Or se la ragione è inversa, può diventare diretta con far passare l'antecedente a conseguente (*principio decimoterzo*) e scrivere

15: 90 :: 80: $x$

moltiplicate ora il secondo per terzo e dividete il prodotto per primo, ed avrete 480 per quarto proporzionale, tempo richiesto allo scavamento.

*Esempio* 2.— *Con* 3 *canne ed* $\frac{1}{4}$ *di panno, largo* 6 *palmi e* $\frac{2}{3}$, *si è fatto l' intero abito ad un personaggio; se si volesse vestire la medesima persona di un panno largo* 5 *palmi e* $\frac{2}{3}$, *quanto panno dovrebbe comprarsi* ?

Qui la larghezza del panno accresce e la quantità da comprarsi diminuisce ; la larghezza diminuisce e la quantità accresce :

Sicchè sta la larghezza prima alla seconda *in ragione inversa* della prima quantità di panno alla seconda, *ossia* 6 $\frac{2}{3}$: 5 $\frac{2}{3}$ *sta in ragione inversa di* 3 $\frac{1}{4}$ : $x$. Volendo far divenire una tale proporzione diretta, si muti la prima ragione e si scriva

5 $\frac{2}{3}$ : 6 $\frac{2}{3}$ :: 3 $\frac{1}{4}$ : *al quarto proporzionale*:

e riducendo tutti in forma frazionaria, diverranno $\frac{17}{3} : \frac{20}{3} :: \frac{13}{4} : x$

e moltiplicando il terzo pel secondo termine, e dividendo il prodotto pel primo, si avranno 3 *canne* e $\frac{279}{544}$ di *canna*, del quale rotto riducendo il numeratore a palmi, indi ad once, e finalmente a minuti, e dividendo i prodotti per 544 (§ 19. *tit.* 4.) si avranno 4 *palmi*, 1 *oncia* e 2 *minuti* con una minuzia, che si può trascurare.

Il quarto termine è dunque 3 *canne*, 4 *palmi*, 1 *oncia*, e 2 *minuti*.

## CLASSE IV.

### § 5.

*Regola del 3 composta da una diretta e da un' inversa.*

*Esempio 1.* — Sia la dimanda seguente.

*Con 4 cannoni, si sono fatte in tre ore* 60 *tiri, si cerca sapere in quanto tempo si potranno fare* 200 *tiri con cannoni* 9.

Qui abbiamo due numeri di cannoni, due numeri di tiri, e due numeri di tempi de' quali uno è conosciuto essere *ore* 3, e l'altro è incognito, espresso da $x$. A maggior distinzione si mettano in lista come siegue

| | |
|---|---|
| *Il numero de' cannoni primi* —— | 4 |
| *Il numero de' cannoni secondi* —— | 9 |
| *Il numero de' primi tiri* —— | 60 |
| *Il numero de' secondi tiri* —— | 200 |
| *Il tempo primo* —— | 3 |
| *Il tempo secondo* —— | $x$ |

Qui la ragione del tempo conosciuto *ore* 3 al tempo $x$ risulta dalla parte che vi prendono sì il numero de' cannoni, che il numero de' tiri che si vogliono; che però s'istituisca il seguente raziocinio.

Più sono i cannoni, meno tempo ci vuole: meno sono i cannoni, più tempo ci vuole; dunque la ragione del tempo noto *ore* 3 al tempo $x$ è nella *ragione inversa* di 4: 9 numero de' cannoni.

Più sono i tiri, più tempo ci vuole; meno sono i tiri, meno tempo ci vuole: dunque la ragione del tempo *ore* 3. al tempo $x$ sta in *ragione diretta* de' tiri 60: 200.

Sicchè la ragione del tempo noto *ore* 3 : $x$ è composta *dalla inversa di* 4: 9 e *dalla diretta di* 60: 200.

Ma l'inversa di 4: 9 è l'istessa che la ragione di $\frac{1}{4}:\frac{1}{9}$, dunque la ragione 3 : $x$ è composta dalle due ragioni di $\frac{1}{4}:\frac{1}{9}$ e 60: 200.

Ma come si semplicizza la composta di due o più ragioni? Col paragonare il prodotto degli antecedenti al prodotto de' conseguenti ( *principio nono* ).

ossia

$$3; x :: \tfrac{1}{4} \times 60 \cdot \tfrac{1}{9} \times 200$$

ossia

$$3: x :: \tfrac{60}{4} : \tfrac{200}{9}$$

*e traslocando*

$$\tfrac{60}{4} : \tfrac{200}{9} :: 3: x$$

Sicchè moltiplicando $\frac{200}{9} \times 3 = \frac{600}{9}$ e dividendo il prodotto $\frac{600}{9}$ per $\frac{60}{4}$ ossia moltiplicando $\frac{600}{9}$ per $\frac{4}{60}$, se ne avrà $\frac{2400}{540}$ = 4 ore e $\frac{240}{540}$ *di ora*, quarto proporzionale che denoterà il tempo richiesto de' tiri.

*Esempio* 2. — 8 *uomini in* 3 *mesi hanno scavato* 235 *palmi di terra; volendone scavare* 792 *in due mesi, quanti uomini dovrebbero essere impiegati?*

Riflettiamo bene queste ragioni. Più sono i palmi a scavare, più uomini sono necessarj al travaglio; gli uomini sono dunque in *ragione diretta* de' palmi, e perciò

80 : $x$ *in ragione diretta de' palmi* 235 : 972.

Al contrario più è il tempo, meno uomini sono necessarj al travaglio; meno è il tempo, più uomini saranno necessarj : gli uomini dunque sono nella *ragione inversa* de' tempi, e perciò

80 : $x$ *nella ragione inversa de' mesi* 3 : 2.

La ragione dunque di 80 : *al quarto* è composta dalla *diretta* de' palmi e dall' *inversa* de' tempi.

Dispongo i numeri in questo modo.

| | |
|---|---|
| 80: *al quarto in ragione composta* | *dalla diretta di.* 235 : 792 |
| | *e dalla inversa di* 3 : 2 |

E poichè nelle ragioni composte da una diretta e da un' inversa, bisogna dividere antecedente per antecedente e conseguente per conseguente ( *principio* 12. *tit*: 7. ) dunque de' due antecedenti che ho situato l'uno sotto l'altro, ne faccio il rotto $\frac{235}{3}$; e de' due conseguenti ne faccio il rotto $\frac{792}{2}$ e dirò così

80 : *al quarto* :: $\frac{235}{3}$ : $\frac{792}{2}$.

E commutando ne avrò

$\frac{235}{3}$ : $\frac{792}{2}$ :: 80 *al quarto*,

Moltiplico il terzo termine pel secondo e dividendo il prodotto

$\frac{63360}{9}$ pel primo $\frac{235}{4}$, *ossia* multiplicando $\frac{63360}{9}$ per $\frac{4}{235}$, ne avrò $\frac{190080}{4670}$, da cui, tratti gl' interi, si avranno 41 in circa, che sarà il quarto termine della proporzione, e dinoterà *quanti uomini sono necessarj nel caso proposto.*

La minuzia o si trascura in simili casi, o si sostituisce un operario, che dia tanto di lavoro, quanto lo dinota la frazione, come si è praticato nel caso della classe 1. pag. 170.

## § 6.

### *Regola del tre composta da due inverse.*

*Esempio* 1.—*Soldati* 70 *per un lavoro hanno impiegato* 8 *ore al giorno, e l' hanno compito a capo di due mesi; quanto tempo ci avrebbero impiegato* 27 *soldati, lavorando* 11 *ore per cadaun giorno?*

Più operaj vi sono, meno sarà il tempo da impiegarvi e viceversa; *la ragione quindi di* 60 *giorni al tempo cercato è inversa della ragione di* 70 *a* 27 *soldati.*

Similmente più è il tempo, meno lavoratori saranno necessarj; *la ragione dunque di* 60 *giorni al numero cercato è inversa della ragione delle ore* 8 *a* 11.

La ragione dunque del tempo conosciuto all' incognito è *composta* dall' *inversa* de' lavoratori e dall' *inversa* delle ore, *ossia*

| La ragione di 60 al tempo che si cerca è composta | *dall' inversa di* 70 : 27<br>*e dall' inversa di* 8 : 11 |
|---|---|

E ritrovando *la composta* delle due ragioni, secondo l' *avvertimento* precedente, ossia *paragonando il prodotto degli antecedenti a quello de' conseguenti* si avrà 60: al tempo incognito in *ragione inversa* di 70×8 : 27×11 ; ed effettuando le moltiplicazioni indicate, si avrà 60: al tempo incognito in *ragione inversa* di 560: 297; e commutando le ragioni si avrà 560 : 297 *in ragione inversa di* 60 *giorni al tempo incognito, che si cerca.* Ciò premesso, si riduca a proporzione diretta (*principio decimo o quarto* § *tit.* 7.) e si avrà 297: 560: 60 al tempo incognito.

Sicchè multiplicandosi il 3 termine per il secondo, e dividendo il prodotto pel primo, si avrà per quoziente 113 con una minuzia trascurabile, se non si vuole protrarre a rigore il calcolo. S' impiegheranno dunque 113 giorni pel lavoro indicato.

*Esempio* 2.—*Mulini* 4, *macinando colla velocità come* 9, *hanno dato in* 32 *giorni* 400 *tomoli di farina, quanto tempo ci avrebbero impiegato* 8 *mulini, che macinato avessero colla velocità come* 7 ?

Qui più sono i mulini, meno sarà il tempo, *la ragione quindi di* 32 *tempo cognito al tempo cercato sta in ragione inversa de' mulini* 4 : 8. Similmente più è la velocità, meno è il tempo che si richiede: *la ragione dunque di* 32 *tempo cognito al tempo, che si cerca, è inversa delle velocità* 9 : 7.

| Sicchè la ragione di 32: $x$ è composta. | *dall' inversa di* 4 : 8<br>*e dall' inversa di* 9: 7 |
|---|---|

Onde 32 : $x$ sta in *ragione inversa* di 9×4: 8×7, ossia 32: $x$ in *ragione inversa* di 36: 56; e commutando le ragioni si avrà 36 : 56 in *ragione inversa* di 32 : $x$ e riducendole a proporzione diretta, si avrà 56 : 36 :: 32 : $x$.

Sicchè il tempo, che si cerca, è uguale a $\frac{36\times32}{56}=\frac{1152}{56}=20\frac{32}{56}=20\frac{4}{7}$. Vi s' impiegheranno dunque 20 giorni e $\frac{4}{7}$ di un giorno.

## § 7.

### *Regola del 3 composta da più dirette e più inverse.*

*Esempio.—Si è scavato un fosso largo palmi* 4, *alto* 26, *lungo* 70, *con la resistenza di* 5, *e si sono impiegati* 8 *giorni da* 50 *lavoratori, che hanno travagliato* 8 *ore al giorno. Volendosi scavare un fosso largo palmi* 5, *alto* 27, *lungo* 73, *con la resistenza di* 9; *in quanti giorni potrà essere terminato da* 100 *uomini, che travaglieranno* 5 *ore al giorno?*

Qui più è la larghezza, altezza, lunghezza, resistenza : più tempo sarà necessario.

Al contrario più sono gli uomini, meno sarà il tempo; e più ore al giorno faticano, meno giorni s' impiegheranno al lavoro dello scavo.

*La ragione dunque del tempo cognito all' incognito* è composta dalla *diretta* della lunghezza larghezza altezza e resistenza, e dall'inversa de' lavoratori e delle ore, in cui travagliano. Si dispongano dunque in questo modo.

| La ragione di 8 giorni al tempo incognito $x$ è composta | | | |
|---|---|---|---|
| | *dalla diretta delle larghezze* | 4 : | 5 |
| | *dalla diretta delle altezze* | 26: | 27 |
| | *dalla diretta delle lunghezze* | 70: | 73 |
| | *dalla diretta delle resistenze* | 5: | 9 |
| | *dall' inversa degli uomini,.* | 50 : | 100 |
| | *e dall' inversa delle ore ...* | 8 : | 5 |

E poichè le ragioni inverse si cambiano in dirette con mutare il luogo de' termini; cadranno perciò nella colonna degli antecedenti 4, 26, 70, 5, 100, e 5, e nella colonna de' conseguenti 5, 27, 73, 9, 50, e 8.

Si moltiplichino gli antecedenti ed i conseguenti fra loro, ed allora

8 starà al tempo incognito :: 4×26×70×5×100×5 : 5×27 ×73×9×50×8. Effettuando le indicate moltiplicazioni si avrà 8: al tempo incognito :: 18200000 : 35478000; e commutando le ragioni si otterrà

18200000 : 35478000 :: 8 : *x quarto proporzionale* che si avrà con moltiplicare il secondo termine pel terzo, ed il prodotto dividerlo pel primo, lo che darà 15 giorni incirca, che sono necessarj allo scavo in quistione.

## CLASSE V.

### § 8.

*Problemi che si sciolgono col rinvenimento di due medii proporzionali. Regola degli usuraj.*

Vi sono casi, ne' quali i lucri derivanti dalle somme sono in ragione continua fra loro, ed allora si deve ricorrere o alla regola ordinaria del *tre* o alle teorie riportate nel *principio* 16 *tit.* antecedente, dalle quali ben si deduce poter due casi avvenire.

O si vogliono progressivamente l'uno dopo l'altro i medj proporzionali.

O dati gli estremi si vuole con ordine retrogrado devenire al rinvenimento degli stessi.

*Caso* 1.

*Cajo ha ricevuto duc: 500 al 10 per cento con questa condizione che, non pagando per ciascun anno, l'usura si aggiunga al capitale. Cajo non pagò per 3 anni; quanto darà per la sorte e per l'usura di usura al mutuante?*

Il quesito si può sciogliere col metodo ordinario della regola del tre e col metodo scientifico espresso nel *principio* 16 *tit. antec.*

*Metodo* 1.

Si aggiunga al 100 l' usura 10 e si faccia 110, e poi si dica se 100 a capo dell' anno è giunto a 110, 500 ducati a quanti giungeranno? *ossia*

$100 : 110 :: 500 : x = \frac{500 \times 110}{100} = 550$ *ecco l'usura del primo anno.*

Di poi si dica: se 100 a capo dell'anno è giunto a 110, 550 a quanti giungeranno? *ossia*

$100 : 100 :: 550 : x = \frac{550 \times 110}{100} = 605$ *usura del secondo anno.*

Finalmente si dica » se 100 a capo dell'anno è giunto e 110, 605 a quanti giungeranno? *ossia*

$100 : 110 :: 605 : x = \frac{605 \times 110}{100} = 665 \frac{1}{2}$ *ecco l'usura del terzo anno.*

*Metodo secondo.*

Al 500 e 550 usura del primo anno si trovi il terzo proporzionale 605: (*princ.* 15. *tit.* 7.) *ecco l'usura del secondo anno.*

Al 605 usura del secondo si trovi il terzo proporzionale 665; *ecco l'usura del terzo anno.*

*Caso* 2.

*Terenzio deve a Gellio* 4608 *ducati per somma di sorte principale ed interessi maturati nel primo anno : nel quarto anno ha pagato* 6561 *ducati ; si cerca sapere quanto sia la sorte e quanto l'interesse?*

Tra 4608 *sorte ed usura* del primo anno e 6561 *sorte ed usura del quarto anno* si ritrovi il primo medio proporzionale col moltiplicare l'estremo 6561 pel quadrato di 4608, e dal prodotto 13931469504 estrarne la radice cubica 5184: ( *principio* 16 *tit.* 7 ) *ecco quel che pagò nel secondo anno.*

Poi si faccia una retrogressione in ragion continua in questo modo » pagamento del secondo anno sta a pagamento del primo, come pagamento del primo alla sorte principale *ossia.*

$5184 : 4608 : 4608 : x = \frac{4608^2}{5184} = 4096$: *ecco la sorte principale.*

Poi si sottragga questa sorte principale dal pagamento del primo anno ossia si sottragga 4096 da 4608, e se ne avrà l'interesse 512, interesse per tutta la somma ricevuta.

Finalmente si dica » se 4096, sorte principale dà per aumento 4609, 100 quanto dà ? *ossia*

$$4098 : 4609 :: 100 : x = \frac{4609 \times 100}{4098} = 112$$ [illegible] che dà 12 [illegible] dippiù *usura per* 100 *ducati*.

Ecco il pagamento degli anni intermedi, la sorte principale e l'interesse richiesto.

*Avvertimento.*

Questo contratto è esecrato dalla nostra santa e Cattolica Chiesa, e da' Teologi morali dicesi anatocismo. Si fa uso ancora di questa regola allorachè si conviene col fittajuolo di un fondo, che gli annui pagamenti si devolvessero sulla miglioria del fondo istesso. Così pattuito, che dall' affitto di un fondo si pagassero 180 ducati annui, ed in vece di pagarli in moneta s' invertissero a miglioria del fondo, potrà sempre domandarsi « a capo del quarto anno di quanto sarà accresciuto il valore del fondo? »

## CLASSE VI.

### § 9.

*Problemi che si sciolgono col dividere un numero cognito in parti proporzionali ad altri numeri cogniti. Regola di società semplice e composta.*

Riflettiamo, o giovanetti, che se un tutto A diviso in più parti si paragoni con un' altro tutto B, è facile indovinare le parti del secondo tutto B proporzionali a quelle del primo tutto A; poichè in tal caso abbiamo 3 termini noti, cioè, il tutto A, il tutto B, la prima parte di A; che però avrà luogo la proporzione.
*tutto A: tutto B :: prima parte di A:x*

Che però si moltiplichi il secondo pel terzo termine ed il prodotto si divida pel primo (§ 9 *tit.* 7). Così per la seconda, per la terza, quarta parte, ec.

Or sogliono i mercatanti aprire trafico per lontani paesi, di colà trasportando generi commerciali, o diversamente negoziando nell'incerto evento delle cose; talchè nel finale rendimento di conto comprendono la quantità del lucro o delle perdite da quel negozio comunemente ricevute. Sogliono pure allo sborso delle spese contri-

buire più mercatanti o quantità eguali di danaro o quantità dispari che essi addinominano *quote*, e così simili contratti.

I problemi che ordinariamente sorgono da questa loro società sono pressochè simili a quel che siegue.

» Tre Mercatanti A. B. C. posero per la esplicitazione di un
» negozio le loro quote rispettive; A pose cioè 325; B aggiunse 400;
» C contribuì 590. Nel rendiconto si trovarono di aver guadagnato
» 900; si chiede sapere quale sia il lucro di A, quale quello di B,
» e quale quello finalmente di C.

Qui abbiamo tre numeri noti: la somma delle quote 325+400+590=1315, il lucro ducati 900, e ciascuna quota parte di 1315; lo chè darà luogo al rinvenimento de' quarti proporzionali che si otterranno con la regola del tre, essendo tre proporzioni dirette.

1. Se l'insieme delle quote 325 + 400+590 ossia 1315 ha dato di lucro duc. 900; quanti ne darà 325 isolatamente preso?—222 e $\frac{570}{1315}$?

2. Se l'insieme delle quote 1315 ha dato di lucro duc. 900, quanti ne darà 400?—273 e $\frac{1005}{1315}$.

3. Se finalmente l'insieme delle quote 1315 ha dato 900 ducati, quanti ne darà 590? 403 e $\frac{1055}{1315}$.

Sommati infatti i tre intieri e tre rotti, si avrà il lucro intero 900.

## § 10.

### *Regola di società composta.*

Nel caso proposto le quote si suppongono poste in un tempo, e tutte ritirate in un altro: ma che faremo se le quote de' rispettivi padroni si ritirassero in tempi diversi? Il caso sarebbe il seguente.

» Tre negozianti A. B. C. posero a lucro il primo duc. 50 per
» due anni: il secondo 500 duc. per tre anni; il terzo 200 per un
» anno solo. Il lucro fu di 500 ducati; quanto ha guadagnato ciascuno?

In questo caso, la somma che sta a lucrare per due anni, si considera come doppia: la somma che sta a lucro per tre anni si considera come tripla, e si considera come la stessa quella che sta a lucro un'anno solo: ed in brevi termini si moltiplichino le quote per i tempi, ossia 50×2; 100 × 3; 200×1; la somma sarà 600; ottenuta la quale è facile stabilire 3 proporzioni.

$$600 : 500 :: 100 : x = \frac{500\times100}{600}\ 83\ e\ \frac{2}{3}.$$

$$600 : 500 :: 300 : x = \frac{300 \times 500}{600} = 250$$

$$600 : 500 :: 200 : x = \frac{200 \times 500}{600} = 166 \text{ e } \tfrac{2}{3}.$$

Sommati in fatti i tre interi e due rotti si trovano uguali a $499 + \frac{3}{3} = 500$.

Sarebbe l'istesso se le quote fossero eguali, ed i tempi ne' quali ciascuno ha lucrato fossero disuguali, come nel caso seguente.

*A pose a lucro* 300 *duc. per* 7 *mesi : B un' altrettanto per* 6 *mesi* : C *li pose per* 12 *mesi ; il guadagno fu di* 1000 ; *quanto ha lucrato ciascuno?*

Allora i mesi si considerano come lucratori, e si potrà enunciare il quesito in questo modo; se la somma di mesi $7+6+12$, ossia 25 ha dato 1000 di lucro, che darà ciascuna quota? » Ciò darà luogo a tre proporzioni.

$$25 : 1000 :: 7 : x = \frac{7 \times 1000}{25} = 280$$

$$25 : 1000 :: 6 : x = \frac{6 \times 1000}{25} = 240$$

$$25 : 1000 :: 12 : x = \frac{12 \times 1000}{25} = 480$$

Quel che si è detto del lucro, si dice ancora della perdita, sempre persuasi che la regola di società non è altra che la regola del tre più volte ripetuta.

## CLASSE VII.

### § 11.

*Problemi che si sciolgono col dividere un numero noto in parti proporzionali alle differenze di altri numeri, ossia regola di alligazione.*

Prima di venire alla soluzione del proposto problema uopo è riflettere, che dati più numeri che si paragonano con un solo, sarà *la somma di tutte le differenze a questo solo*, *come ciascuna differenza particolare ad una porzione del tutto solo.*

Sieno i numeri 5, 6, 7, che si paragonino con 12, e di cui si notino le differenze così

| | | |
|---|---|---|
| 5 differisce | da 12 | di 7 |
| 6 differisce | da 12 | di 6 |
| 7 differisce | da 12 | di 5 |

La somma delle differenze è 18; che però

18 somma delle differenze: 12 num. medio :: 7 speciale diff.: $x$
18 somma delle differenze: 12 num. medio :: 6 speciale diff.: $x$
18 somma delle differenze: 12 num. medio :: 5 speciale diff.: $x$

Il 1 = sarà $=\frac{7\times12}{18}=\frac{84}{18}=4\frac{2}{3}$

Il 2 $=\frac{6\times12}{18}=\frac{72}{18}=4$

Il 3 $=\frac{5\times12}{18}=\frac{60}{18}=3\frac{1}{3}$

Sommati in fatti i rotti $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+4+3+4=12$.

Ciò premesso venghiamo a spiegare i problemi che si dicono di *alligazione*.

Soglionsi soventi volte tramescolare o alligare in una sola massa o liquori o merci o metalli di diverso prezzo, dalla quale miscela ne sorge un tutto a cui si dà un valore particolare, dandosi perciò luogo ad una dimanda » quanto ha contribuito di prezzo ciascheduno de' generi tramescolati?

Sia l' esempio che siegue.

*Si deve fare una statua di argento di 200 libbre: l' artefice vi ha impiegato due specie di metallo, la prima del valore di ducati 32, l' altra del valore di ducati 25. — La statua è già fatta dalla fusione di 120 libbre della prima spezie e di 180 della seconda. Ora qual costo darsi a ciascuna libbra della statua già fatta?*

Si faccia il computo di quanto tutta la statua costi, e ciò facil cosa sarà, se si moltiplicheran le due spezie di metallo per il rispettivi valori, ossia 120×30 e 180×25; la loro somma 8100 dinoterà il prezzo dell' intiera statua. Indi s' istituisca la seguente proporzione.

Se tutta la statua costa 1800, quanto costerà una sola libra? ossia

$$300 : 1800 :: 1 = \frac{1\times1800}{300}$$ 6 *ducati, che ciascuna libra del metallo costa.*

## § 12.

*Regola del mozzo comunemente detta*

Soglionsi in piazza o bottega vendersi vari generi di diverso prezzo, che talune volte cedonsi ad un solo che offre per tutti un certo prezzo. Ciò si dice *comprare a mozzo*. Eccone un esempio.

*Un venditore espone in piazza olio di grana* 24 *il rotolo, ed olio di grana* 35. *Si presenta un compratore con soli grana* 33 *dicendo » datemi dell' uno e dell' altro in proporzione del mio danaro ». Quanto dovrà il venditore versar dell' un genere dell' olio, e quanto dell' altro per formare una quantità che adegui il prezzo di grana* 33?

Tra i due prezzi 24 e 25 si stabilisca un prezzo medio, che già è l' offerto 33, e si scriva come siegue:

$$33 \left|\begin{array}{c} 24 \\ \\ 35 \end{array}\right|$$

indi si vegga la differenza tra 24 e 33 ossia fra il minore e 'l medio, e si ponga a fianco del 35 prezzo maggiore: poi si vegga la differenza fra il medio 33 ed il maggiore 35, e tal differenza 9 si metta al fianco del numero 24 nel modo che siegue

$$33 \left|\begin{array}{c|c} 24 & 2 \\ & \\ 35 & 9 \end{array}\right.$$

Si faccia la somma delle due differenze, e poi si dica

La somma delle differenze 11: differenza 1 :: l'undecima parte di un rotolo: $x$. Che però si dà luogo alle due proporzioni seguenti.

Se 11 dà 1, 2 quanto darà? $\frac{2}{11}$

Se 11 dà 1, 9 quanto darà? $\frac{9}{11}$ di un rotolo. Che dia quindi dell' olio più prezioso $\frac{2}{11}$ e dell' olio meno prezioso $\frac{9}{11}$.

## § 13.

*Regola del mozzo composta*

Sogliono alcune volte vendersi non due, ma più generi di merci, e alcuno vi è che con un tal prezzo vuole acquistare parte di tutte, come nel caso che segue.

*Una libra di garofano costa carlini* 3, *una di pepe carlini* 4, *una di cinnamono carlini* 6, *una di croco carlini* 9. *Il com-*

*pratore non ha che carlini 7 , quali presenta alla venditrice dicendo « datemi una libra composta di tutti questi generi in proporzione del mio danaro » quanto darà di garofano , quanto di pepe , di cinnamomo, di croco la venditrice a formare una libbra ?*

Si scriva il prezzo medio ad una parte , e poi si faccia la lista delle merci nel modo che siegue.

| | |
|---|---|
| 7 | *Garofano*——prezzo——3. |
| | *Pepe*——————4. |
| | *Cinnamomo* —————6. |
| | *Croco* ——————9. |

Si vegga la differenza del prezzo medio col primo e l' ultimo della lista, e si notino al fianco della stessa con modo alternativo , ossia 2 differenza di 7 e 9 a fianco di 3, e 4 differenza di 7 e 3 a fianco di 9 come qui sotto sta scritto.

Si ripeta la stessa operazione fra il pepe e'l croco ossia fra il secondo e l' ultimo , e si metta 2 differenza di 7 e 9 a fianco del pepe, e 3 differenza di 7 e 4 a fianco del croco con una virgola intermedio in linea retta come siegue

| | | |
|---|---|---|
| 7 | *Garofano*——3. | 2 |
| | *Pepe* ————4 | 2 |
| | *Cinnamomo*—6 | 2 |
| | *Croco* ———-9 | 4, 3, 1 |

Si continui l'operazione facendosi paragone del prezzo medio con quello del terzo e l' ultimo ossia del *cinnamomo e croco*, e si metta 2 differenza di 7 e 9 a fianco del cinnamomo ed 1 differenza di 7 e 6 a fianco del croco e propriamente in linea retta con 4 e 3.

Si faccia la somma delle differenze $2+2+2+4+3+1=14$. Indi s' istituisca tante volte l' operazione quante sono le merci dicendo

Se 14 dà libbra 1, che darà 2?
Se 14 dà libbra 1, che darà 2?
Se 14 dà libbra 1, che darà 2?
Se 14 dà libbra 1, che darà 9 ?

E si vedrà che libra di garofano porta—— $\frac{2}{14}$
di pepe———— $\frac{2}{14}$
di cinnamomo —— $\frac{2}{14}$
di croco ———— $\frac{9}{14}$

Sicchè, supposta la libra divisa in 14 parti, a comporre la stessa ne prenderò 2 di garofano, 2 di pepe, 2 di cinnamomo e 9 di croco.

## CLASSE VIII.

### § 14.

*Problemi che si sciolgono col dividere un numero* vero *in parti proporzionali alle parti di un numero o di due numeri* finti. *Regola della falsa posizione semplice.*

L'Aritmetico soventi si vede nella necessità di dividere un numero sotto alcune determinate quistioni, ma il modo non si presenta sì volentieri in prospetto della mente, ondecchè ne resta sorpreso, irresoluto e confuso. Che fa allora per assegnare le indicate condizioni al numero proposto? finge che un altro numero, preso a volontà, soddisfacesse alla quistione: gli fissa e determina le condizioni stesse che al numero vero proposto, e là per là stabilisce una proporzione » se il numero falso con le determinate condizioni mena al rinvenuto resultamento; a quale menerà il numero vero »? L' esempio chiarirà vie meglio l' esposto.

Esempio 1. *Trovare un numero, di cui il terzo + la metà + la sesta parte facciano il numero insieme preso* 48.

Qui si finga un numero, che soddisfi alla quistione e sia 30. Di tal numero 30 il terzo è 10, la metà è 15, la quinta parte è 6.

Ecco in prospetto 3 numeri

10, 15, 6

Si supponga il numero 48 diviso in parti proporzionali alle dette e tali parti sieno A, B, C.

Ecco due serie di numeri

10, 15, 6
A, B, C

Che sono in proporzione fra di loro, ossia

10 : 15 :: 6 :
A : B : C

che si leggono così » 10 : 15 come A : B.
15 : 6 come B : C;

Ma quando due serie stanno in ragione ordinata fra di loro, sta la somma di tutti gli antecedenti alla somma di tutti i conseguenti, come un solo antecedente ad un solo conseguente

( *principio* 7. § 13. ) dunque' sta 31 *somma degli antecedenti a* 48 *somma degli antecedenti*, come 10 primo antecedente ad $x$ e si avrà

$$31 : 48 :: 10 : A = \frac{10 \times 48}{31} = 15 \frac{15}{31}$$

$$31 : 48 :: 15 : B = \frac{15 \times 48}{31} = 23 \frac{7}{31}$$

$$31 : 48 :: 6 : C = \frac{6 \times 48}{31} = 9 \frac{9}{31}$$

Dunque 48 avrebbe alla terza parte $15 \frac{15}{31}$

alla metà —— $23 \frac{7}{31}$

alla quinta parte $9 \frac{9}{31}$

Che si sommi in fatti i detti interi e rotti e se ne avrà i numero 48.

*Esempio* 2. = *Tre fontane versano contemporaneamente dell'acqua in una vasca capiente di* 170 *barili; ma però la seconda versa in un' ora il doppio dell' acqua che versa la prima, e la terza versa il quadruplo della seconda ; si cerca sapere quant' acqua versa la prima fontana, e quanta la seconda e la terza ?* ( Arit. prat. ).

Si finga, che la prima fontana versi 2 barili in un' ora ; la seconda dovendo dare una quantità doppia della prima, darà 2 barili ; la terza dovendo dare una quantità che sia la somma dell'una e dell' altra, darà 4 barili.

Riuniti i numeri 2, 4, e 6, se ne ha l' insieme 12. Indi s'istituisca questa proporzione.

*Se* 12 *nasce dalla posizione* 2; *da quale posizione* 170 *nascerà?* Si dispongano i numeri al modo che segue.

12 : 2 :: 170 ? *al quarto*

E si avrà il *quarto* $= \frac{170 \times 2}{12} = \frac{340}{12} = 28 \frac{4}{12} = 28 \frac{1}{3}$.

La prima fontana dunque verserà 28 barili ed $\frac{1}{3}$ in un' ora.

La seconda il doppio, *ossia* 56 e $\frac{2}{3}$ di barile.

La terza l' insieme di 28 $\frac{1}{3}$ e 56 $\frac{2}{3}$ *ossia* 85.

Sommati in effetti 28 $\frac{1}{3}$, 56 $\frac{2}{3}$, ed 85, si avranno di bel nuovo 170.

*Esempio* 3. = *In un gioco, se* Domitilla *mette il quadruplo di monete che* Marzia, *e se* Sempronia *la metà che* Domitilla, *si troveranno sul tavolino ducati* 35. *Si cerca sapere quanto ha posto caduna?*

Supponghiamo che *Marzia* riponga 3 monete, *Domitilla* ne riporrà 12, e *Sempronia* 6, quali uniti insieme fanno 21 : indi si dica.

*Se* 21 *nasce da* 3; *da chi* 35 *nascerà?* e si vedrà che il *quarto* sarà uguale a $\frac{35 \times 3}{21} = \frac{105}{21} = 5$.

Sicchè Marzia metterà 5, Domitilla 20, e Sempronia mette-

rà 10. Uniti in effetti 5+20+e 10 e si avranno 35 ducati sul tavolino.

## LEZIONE XIII.

### DOPPIA POSIZIONE.

Se alla soluzione della quistione non basta una falsa posizione, ma se ne richieggano due, dicesi *regola di doppia posizione.*

In questa è necessario osservare quanto le due somme arbitrarie differiscano dalla vera, ch' è la base della quistione; e queste differenze diconsi *errori;* che se ambedue sono maggiori o ambedue minori della vera, diconsi *errori simili:* ma se l' una eccede, e l' altra è in difetto diconsi allora *errori dissimili.*

Or due casi possono occorrere.

*O gli errori sono simili.*

*O gli errori sono dissimili.*

*Esempio del Caso* 1.— *Clori, Amarilli, ed Aretusa cogliendo fiori s' impegnarono l' un l' altra di sorpassarsi: ma la prima colse 60 fiorellini più di Clori, e la terza ne colse tanti quanti la seconda e 3 di più: tutte e tre però ne colsero* 198. *Si cerca sapere quanti ne colse ciascuna delle donzelle?* (Arit. prat. ).

Supponghiamo la prima aver colto 6; la seconda ne avrà colto due volte 6 *ossia* 12 e 60 di più, *ossia* 72; la terza anche 72 e 3 di più, *ossia* 75: riuniti insieme 6+72+e 75, uguagliano 153. Ma doveano essere 198: l' errore è dunque 45, che si noti.

Supponghiamo similmente che la prima avesse colto 8: la seconda avrà colto due volte 8 *ossia* 16, e 60 dippiù *ossia* 76; la terza anche 76 e 3 dippiù, *ossia* 79. Riuniti insieme 8+76+e 79. si avranno 163, che differiscono dal numero 198 di 35. Si noti il secondo errore 35.

Or ciò premesso, si scrivano le posizioni e gli errori a questo modo.

1. Posizione = 6, Errore 1 = 45 ( differenza de-
2. Posizione = 8, Errore 2 = 35 ( gli errori 10.

Si moltiplichi la prima posizione 6 pel secondo errore 35, e la seconda posizione 8 pel primo errore 45, e de' prodotti 210 e 360 trovata con la sottrazione la differenza 150, si divida questa per 10 differenza degli errori, ed il quoziente 15 dinoterà i fiori colti da Clori.

*Clori dunque colse*——fiori ————15
*Amarilli*————15 + 15 + 60 =90
*Aretusa* ————90 + 3=————90

Riunite in effetti 5, 90, e 93, ed avrete il numero de' fiori 198.

Si scioglie così il quesito, se ambedue gli errori superassero il numero 198.

Che se poi gli errori sono dissimili, ossia che l'uno eccede, e l'altro difetta dalla vera posizione, allora si divida la somma de' prodotti per la somma degli errori.

*Esempio del caso* 2. = *In una botte di generoso vino il servo frodolento ha versato molt' acqua; si cerca con calcoli aritmetici scoprire la quantità dell' acqua versatavi.*

Si pesi una caraffa di generoso vino, un' altra di acqua assoluta, ed un' altra finalmente di vino sospetto.

Si notino i pesi delle rispettive caraffe, e da questi si argomenti il peso dell' intera botte, se fosse piena di generoso vino, ovvero di acqua assoluta.

Così supposto che il peso di una caraffa di vino generoso fosse di once 30, l' intera botte sarebbe 38400; e ciò si ha riducendo la botte a 32 barili, i 32 barili a 1280 caraffe, e queste moltiplicando per 30 once.

Così se il peso di vino sospetto è 34 once, la botte sarà once 43520.

E se il peso della caraffa d' acqua è 36 once, il peso sarà once 46080. Or ciò premesso, si ricorra *alla falsa doppia posizione.*

*Posizione prima.*

Suppongasi, che nella botte sospetta 30 barili sieno di vino, e 2 di acqua. Allora, riducendo tutto ad once, vi saranno di vino *once* 36000 e di acqua 2880. Riuniti insieme ascendono a 38880. Ma dovrebbero essere 43520; si è errato in difetto dunque di 4640.

*Posizione seconda.*

Supponghiamo al contrario, che 2 barili fossero di vino e 30 di acqua Allora, riducendo tutto ad once, vi saranno di acqua *once* 43200 e di vino 2400. Riunite insieme tali once, si avranno 45600. Ma dovrebbero essere 43520; si è errato dunque per eccesso di 2080 once. Ciò premesso si dispongano a questo modo

1. Posizione — 2 di acqua ( 1. Errore 4640
2. Posizione — 30 di acqua ( 2. Errore 2080

*Somma degli errori* 6726

Si moltiplichi la prima posizione pel 2 errore, e la seconda posi-

zione pel primo errore, ed i prodotti 4160 e 139200 si sommino fra loro. Dividasi l'aggregato 143360 per 6720 *somma degli errori*, e'l quoziente 21 $\frac{2240}{6720}$ = a 21 ed $\frac{1}{3}$ dinoterà l' acqua versatavi. Nella botte dunque vi sono 21 barili ed $\frac{1}{3}$ di acqua e 10 e $\frac{2}{3}$ di vino. Ridotti ed effetti 21 barili d'acqua ad once 30666 incirca, ed i 10 $\frac{2}{3}$ di vino ad once 12852 in circa, si hanno dalla loro somma 43518, che dalle once della botte sospetta non differiscono più di 2 once.

## § 15.

### *Corona di Gerone.*

Giovanetti, è in occasione di questa classe di problemi, che io vi riferisco e dilucido l'esempio della corona di Gerone, che propone il dotto e preciso *Paulini « prop.* 9. *Cap.* 6 del suo libro *Institutiones Aritmeticae.* L'ho prescelto fra tutti, perchè trovandovisi un maneggio copioso di rotti, voi occasione vi avete di applicare quasi tutte le regole e teorie degli stessi con somma utilità ed incredibile diletto. Nè ho voluto mutare le posizioni dell'autore su riferito, perchè ogni altra posizione che avrebbe dato intieri al quarto proporzionale non vi avrebbe recato tanto esercizio, quanto il presente. L'esempio è il seguente.

» Avendo un orefice ricevuta commissione dal Re Gerone, che costruita gli si fosse una corona di oro, usò di frode fondendovi parte di argento. Invitato Archimede a scovrire l' inganno del suddito infedele, precisò la quantità dell'oro puro e la quantità dell'argento di cui la corona costava. E ciò, come si dice, coll'immettere in un vaso ripieno di acqua tre corone, una di oro puro, una di puro argento e l'altra già adulterata. Notò con diligenza e misurò a ciascuna immersione la quantità dell'acqua versata, e dalle proporzioni delle diverse quantità delle dette argomentò la parte dell' oro e quella dell' argento ».

Non sappiamo se con altre indagini d' intelletto o con calcoli aritmetici fosse allo scovrimento dell'inganno l'incomparabile filosofo pervenuto; ma se colla scienza de' numeri il fu, alla regola della *falsa posizion doppia* dovè per certo ricorrere.

Che però si ponga la corona di 12 libre:

l' acqua versata per la corona adulterata libre — 7 $\frac{4}{5}$
l' acqua versata per la corona di oro ———— 7 $\frac{2}{5}$
l' acqua versata dalla corona d'argento lib. —— 10 $\frac{4}{5}$:
Si supponga dippiù aver l'orefice posto *oro libre* — 9
*argento libre* — 3

Che però, facendo uso della regola del tre, si può dire

Se 12 libre di oro danno $7\frac{1}{5}$ di acqua, 9 libre quanta ne daranno?

*ossia*

Se $\frac{12}{1} : 7\frac{1}{5} :: \frac{9}{1} : x$

*ossia*

$\frac{12}{1} : \frac{36}{5} :: \frac{9}{1} : x$

E moltiplicando il secondo pel terzo e dividendo per primo

$x = \frac{36}{5} \times \frac{9}{1} \times \frac{1}{12} = \frac{324}{60} = 5\frac{24}{60} = 5\frac{2}{5}$.

Similmente se 12 libre di argento danno $10\frac{4}{5}$, 3 che daranno?

*ossia*

$12 : 10\frac{4}{5} :: 3 : x$

*ossia*

$\frac{12}{1} : \frac{54}{5} :: \frac{3}{1} : x$

E moltiplicando il terzo pel secondo e dividendo pel primo

$x = \frac{54}{5} \times \frac{3}{1} \times \frac{1}{12} = \frac{162}{60} = 2\frac{42}{60} = 2\frac{7}{10}$.

Che si riuniscano le due quantità, ossia 5 e $\frac{2}{5}$ versata dell'immersione dell'oro, e $2\frac{7}{10}$ versata dall'immersione dell'argento. E poichè $5\frac{2}{5} + 2\frac{7}{10}$ ridotti all'istessa denominazione sono $5\frac{12}{30} + 2\frac{21}{30} = 7\frac{33}{30}$ dunque le due quantità di acqua, prese insieme, sono eguali ad $8\frac{1}{10}$.

Ma dovevano essere libre 12: dunque la corona sarebbe $12 = 8\frac{1}{10}$. Che il 12 si sciolga in $11\frac{10}{10}$, e da $11\frac{10}{10}$ tolto $8\frac{1}{10}$, il residuo sarà $2\frac{9}{10}$.

*Posizione seconda.*

Si finga per la seconda volta, che l'oro sia libre 8, dunque d'argento saranno libre 4. Or si dica colla regola del tre

Se 12 dà $7\frac{1}{5}$ di acqua, che daranno libre 8?

*ossia.*

Se 12 dà $\frac{36}{5}$, che darà 8? darà $\frac{288}{60} = 4\frac{48}{60} = 4\frac{4}{5}$ di acqua?

Similmente se 12 di argento danno $10\frac{4}{5}$, che daranno libre 4?

*ossia*

$12 : 10\frac{4}{5} :: 4 ? x$

E si avrà $x = 3\frac{3}{5}$

Unite le due quantità di acqua $4\frac{4}{5}$ e $3\frac{3}{5} = 7\frac{7}{5} = 8\frac{2}{5}$.

Ma dovevano essere $7\frac{4}{5}$: dunque l'errore è $8\frac{2}{5} - 7\frac{4}{5}$.

*ossia*

$7\frac{5}{5} + \frac{2}{5} - 7\frac{4}{5} = 7\frac{7}{5} - 7\frac{4}{5} = \frac{3}{5}$ ossia $\frac{6}{10}$ che si noti col $+$ vicino la posizione 8, come siegue

1. *Posizione* $= 9$ *Errore* 1. $= +\frac{3}{10}$ ⎫ differenza degli errori $\frac{3}{10}$
2. *Posizione* $= 8$ *Errore* 2. $= +\frac{6}{10}$ ⎭

Che si moltiplichi la posizione prima per l' errore secondo e la posizione seconda per l'errore primo e si avrà

$$\left.\begin{array}{l} 9 \times \frac{6}{10} = \frac{54}{10} \\ 8 \times \frac{3}{10} = \frac{24}{10} \end{array}\right\} \text{differenza de'prodotti} = \frac{30}{10} = 3$$

Or la differenza di questi prodotti ossia $\frac{30}{10}$ si divida per la differenza degli errori, che si è trovata $\frac{3}{10}$ ossia si moltiplichi

$$\frac{30}{10} \text{ per } \frac{10}{3}\text{, il quoziente sarà } \frac{300}{30} = 10$$

L'oro dunque della statua era 10 libre, e per conseguenza di argento non vè ne erano che 2?

### *Avvertimento.*

Ecco una delle dimostrazioni, che si desidera nell' Aritmetica Elementare, la dimostrazione della falsa posizione doppia. Essa abbisogna di formole algebriche, alle quali voi non siete ancora iniziati. Altri aritmetici hanno per tal ragione differita le soluzione de'problemi di simil fatta; ma io ho stimato apporli per farvi comprendere il bisogno preciso, che voi avete della scienza sublime dell'*Algebra*, se volete progredire nelle recondite e sottilissime scoperte de' rapporti delle *grandezze* o *quantità*. Accingetevi, o giovanetti, a munirvi della gran chiave che disserra le porte della Matematica trascendentale, ed il magnifico portentoso tempio delle più nobili ed interessanti scienze, a cui possa l'acume dell'ingegno possibilmente aspirare.

# INDICE

## CONSIGLIO GENERALE

DI

PUBBLICA ISTRUZIONE

*Napoli 4, Dicembre 1855.*

Vista la dimanda del Tipografo Giuseppe Cataneo, con che ha chiesto di porre a stampa l'Opera intitolata — NUOVA ARITMETICA TEORETICO-PRATICA per cura del *Sig. Canonico D. Antonio Vitale.*

Visto il parere del Regio Revisore *Sig. D. Paolo Garzillo.*

Si permette che la suindicata opera si stampi; però non si pubblichi senza un secondo permesso, che non si darà, se prima lo stesso Regio Revisore non avrà attestato di aver riconosciuto nel confronto esser l'impressione uniforme all'originale approvato.

*Il Consultore di Stato*
*Presidente provvisorio*
SIGNOR CAPOMAZZA

*Il Segretario*
GIUSEPPE PIETROCOLA.